

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

*На правах рукописи*

Осипов Евгений Александрович

Квазипериодические решения  
граничных задач и задач сопряжения  
для уравнений теории упругости

01.01.02 – дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
профессор Н.Б. Плещинский

Казань – 2017

# Оглавление

Введение . . . . .	3
Глава 1. Упругие волны Флоке в полуплоскости . . . . .	12
1. Квазипериодические решения плоской теории упругости . . . . .	12
2. Энергия упругой волны . . . . .	19
3. Дифракция упругой волны на границе полуплоскости с периодической системой дефектов . . . . .	23
4. Переопределенные граничные задачи . . . . .	37
Глава 2. Двумерные задачи сопряжения в слоистых областях . . . . .	42
5. Постановки задач сопряжения . . . . .	42
6. Задачи сопряжения двух упругих полуплоскостей . . . . .	44
7. Задачи сопряжения в упруго-слоистых средах . . . . .	53
Глава 3. Трехмерные двоякопериодические задачи . . . . .	64
8. Квазипериодические по двум переменным решения уравнений трехмерной теории упругости . . . . .	64
9. Энергетические характеристики упругих волн . . . . .	70
10. Граничные задачи для системы уравнений теории упругости в полупространстве . . . . .	73
11. Задача об отражении и преломлении упругой волны на границе раздела упругих сред . . . . .	85
Заключение . . . . .	87
Список литературы . . . . .	88

## Введение

В диссертации исследуются граничные задачи и задачи сопряжения для систем дифференциальных уравнений с частными производными, к которым приводятся некоторые задачи теории распространения и дифракции гармонических упругих волн в плоскостойких средах с периодическими системами неоднородностей типа трещин, отслоений или тонких включений. Задачи сопряжения рассматриваются в следующей постановке. В каждом слое, конечной толщины или полубесконечном, нужно найти квазипериодические решения системы уравнений эластодинамики – комплексные амплитуды напряжений и перемещений, предельные значения которых на границах раздела сред удовлетворяют некоторым линейным условиям, имеющим определенный физический смысл. Основная цель работы – получить равносильные исходным граничным задачам и задачам сопряжения регулярные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений или интегральные уравнения, на основе которых могут быть построены алгоритмы численного решения задач дифракции упругих волн на периодических системах дефектов в слоистых упругих средах.

Задачам дифракции акустических, электромагнитных и упругих волн на препятствиях различной природы посвящено очень много публикаций (см., например, [11, гл. 4], [5, 13]). Достаточно полно исследованы задачи дифракции электромагнитных волн на периодических системах неоднородностей. Близкие к ним по постановке и по методам решения задачи теории упругости исследованы существенно меньше. Это, вероятно, связано с тем, что математические модели дифракционных решеток и антенных устройств широко используются при проектировании и оптимизации реальных оптических и радиотехнических конструкций. Интерес к изучению процесса дифракции упругих волн на периодических системах трещин в телах или сейсмических волн на неоднородностях в слоистых пластах появился значительно позже. Кроме того, граничные задачи и задачи сопряжения для уравнений теории упругости являются более сложными, чем их электродинамические аналоги.

Первое приближенное решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на простой решетке в случае, когда длина волны существенно больше периода структуры, построил Лэмб [74]. На допущенные им неточности указано в работе [19]. Акустическая задача дифракции плоской волны на решетке впервые рассматривалась в работе Майлза [75].

Подробный обзор исследований по задачам дифракции электромагнитных волн на периодических решетках можно найти в получивших широкую известность книгах В.П. Шестопалова и его коллег [57, 58, 59]. В первой из них содержится подробное изложение метода по-

луобращения парного сумматорного уравнения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке с помощью явного решения вспомогательной краевой задачи для аналитических функций – задачи Римана-Гильберта. Этот метод был предложен впервые в статье [1]. Метод такого полуобращения является регуляризирующим, он приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомого поля в ряд, приближенное решение которой может быть найдено методом усечения.

Методом задачи Римана-Гильберта удалось решить много практически важных задач. Но этот метод связан с громоздкими вычислениями, что особенно проявляется, например, при увеличении числа лент в полосе периода решетки. Известны и другие подходы к исследованию задач дифракции волн на периодических решетках.

В работе Г.Н. Гестриной [8] было предложено использовать при решении задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке метод интегральных уравнений. В работах Ю.В. Ганделя [6, 7] (см. также монографию [3, гл.15]) парное сумматорное уравнение задачи дифракции было сведено к сингулярному интегральному уравнению, для численного решения которого предложено использовать метод дискретных особенностей.

Дифракции электромагнитных волн на периодических решетках посвящено исследование [20], в этой книге рассматриваются как одноперiodические, так и двоякопериодические задачи.

В статье И.Е. Плещинской и Н.Б. Плещинского [44] было предложено проводить регуляризацию интегрального уравнения задачи дифракции электромагнитной волны на решетке за счет обращения характеристической части интегрального уравнения, но этот прием является слишком сложным для практического использования.

Достаточно эффективным оказался подход, предложенный впервые в работе Н.Б. Плещинского и Д.Н. Тумакова [49] (см. также [47]), основанный на методе регуляризации парного сумматорного уравнения задачи дифракции электромагнитной волны с помощью интегрально-сумматорного тождества. Такое тождество представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости вспомогательной переопределенной граничной задачи. В данной диссертации этот метод распространен на парные уравнения граничных задач и задач сопряжения для уравнений динамической теории упругости при наличии периодических систем дефектов, как в двумерном, так и в трехмерном случае.

В последние годы усилился интерес к задачам дифракции волн на периодических системах неоднородностей. В работе Г. Шмидта [60] дана вариационная постановка задачи дифракции. Доказано существование слабого решения и его единственность для всех частот,

кроме, может быть, дискретного множества. Вариационные методы использовались также в работах Аббоуда, Бао, Добсона, Неделека и Старлинга. Численный анализ решения задачи дифракции ТМ-поляризованной волны на периодической структуре проведен в работе [65]. Среди публикаций, посвященных проектированию и оптимизации периодических структур, отметим работу [66].

Задачи дифракции волн на периодических структурах, в том числе и рассматриваемые в диссертации, приводятся, как правило, к граничным задачам и задачам сопряжения с периодическими краевыми условиями. Но существенно больше внимания уделяется в литературе краевым задачам для уравнений с частными производными с периодическими коэффициентами. Такие задачи появляются при исследовании электромагнитных и упругих волн в периодических структурах, например, волноводов с периодическим возмущением границы. Классической работой в этом направлении является книга Бриллюэна [69]. Методам расчета волновых полей в периодических структурах посвящены работы А.С. Ильинского [15, 16].

Современный подход к задачам теории распространения волн в периодических структурах изложен в обзорной статье [64] и в монографии [78]. Прямым и обратным задачам дифракции волн на периодических структурах посвящены работы [72] и [14]. Задачи теории колебаний в средах с периодическими системами неоднородностей рассматривались в работе [54]. Свойства упругих волн в слоистых средах подробно исследованы в монографиях [41, 42].

Задачи дифракции упругих волн на тонких телах, не образующих периодических систем, рассматривались в работах [9, 12, 17, 50, 51, 71].

Существенно больше публикаций имеется по стационарным задачам теории упругости для тел с периодическими системами дефектов. Одной из первых была исследована периодическая контактная задача о взаимодействии периодической системы штампов с упругим основанием. Эта задача сведена к интегральному уравнению с логарифмическим ядром, решение которого найдено в явном виде (см., например, [61]).

Подробный обзор работ по стационарным периодическим задачам можно найти в монографии В.В. Панасюка, М.П. Саврука, З.Т. Назарчука [40]. Периодические задачи теории упругости исследовали также И.А. Солдатенков [53], Ж. Блок и Л. Кир в работах [67, 68].

В диссертации принят следующий порядок исследования граничных задач и задач сопряжения с периодическими системами неоднородностей на границах областей. В неоднородных граничных условиях в качестве заданных функций рассматриваются квазипериодические функции (что соответствует случаю, когда волна, набегаящая на периодическую структуру, является волной Флоке или, в частном случае, плоской волной). Решения уравнений

динамической теории упругости отыскиваются также в классе квазипериодических функций. Показано (на примере граничной задачи для полуплоскости с периодической системой дефектов на границе), что такие решения могут быть только квазипериодическими.

В каждой части слоистой структуры записывается разложение искомого решения в ряд по элементарным гармоникам Флоке, с учетом требуемого поведения на бесконечности. Тогда граничные условия на дефектах и условия вне дефектов сводятся к парным сумматорным функциональным уравнениям (ПСФУ), скалярным для простых задач или векторным для более сложных. Как правило, удастся получить ПСФУ в стандартной форме, когда одна из двух частей парного уравнения является однородной. Тогда с помощью интегрально-сумматорного тождества можно перейти от ПСФУ к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения искомых функций по гармоникам. Термин "регулярная" здесь используется в том смысле, что приближенное решение такой БСЛАУ может быть получено методом усечения.

Для регулярных БСЛАУ с аналогичным асимптотическим поведением коэффициентов при неизвестных БСЛАУ доказано (см. [49]), что при определенном соотношении между параметрами усечения последовательность решений конечных СЛАУ сходится к точному решению БСЛАУ. Более того, если исходная БСЛАУ может иметь только одно решение, то, хотя бы начиная с некоторой размерности, все конечные СЛАУ имеют единственное решение, предел последовательности таких решений существует и является решением БСЛАУ [46]. Поэтому в диссертации особое внимание уделяется именно методам сведения исходных граничных задач и задач сопряжения к ПСФУ в стандартной форме.

Парные сумматорные уравнения задач дифракции также сводятся к интегральным уравнениям с логарифмической особенностью в ядре или к гиперсингулярным. Если искать приближенное решение таких уравнений методом Галеркина, то при соответствующем выборе системы базисных функций будем иметь точно такие же аппроксимирующие СЛАУ, что и при усечении БСЛАУ.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованных источников.

Первая глава диссертации посвящена граничным задачам для системы уравнений плоской теории упругости в полуплоскости в классе функций, гармонически зависящих от времени и квазипериодических по одной из пространственных координат. В первом параграфе построено общее квазипериодическое решение системы уравнений для коэффициентов Флоке и выделены четыре типа частных решений – элементарные гармоники Флоке. Во втором па-

параграфе для каждой элементарной гармонике найдены выражения компонент среднего значения вектора Умова-Пойнтинга (плотности потока энергии) и показано, что первая и третья гармоник положительно ориентированы по отношению к границе полуплоскости, а вторая и четвертая – отрицательно ориентированы. Решение системы уравнений теории упругости (и соответствующая ему упругая волна) называется положительно ориентированными, если упругая энергия переносится в направлении положительной нормали к границе полуплоскости или (и) затухает в этом направлении. Установлено, что для упругой ориентированной квазипериодической волны поток энергии через период равен сумме потоков энергии через период отдельных гармоник.

В третьем параграфе рассмотрены различные варианты задачи дифракции упругой квазипериодической волны на периодической системе дефектов, размещенных на границе упругой полуплоскости. Такие задачи сводятся к граничным задачам для системы уравнений плоской теории упругости, решения которых отыскиваются в классе положительно ориентированных решений. Решения, уходящие от системы дефектов в полуплоскость, интерпретируются как отраженные от границы волны. Предварительно показано, что если упругая полуплоскость находится в полном контакте с жестким основанием вдоль всей границы (или скользит без трения по основанию), то в отраженной волне содержатся гармоники Флоке с теми же номерами, что у падающей волны.

Первый вариант граничных условий задачи дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе упругой полуплоскости, имеет следующий физический смысл: полуплоскость находилась в полном контакте с жестким основанием, но отслоилась от него (и скользит без трения) вдоль дефектов. Доказано, что такая задача дифракции сводится к парному сумматорному функциональному уравнению. С помощью интегрально-сумматорного тождества парное сумматорное уравнение преобразовано в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Также показано, что парное уравнение сводится к интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре. Второй вариант граничных условий: дефекты представляют собой участки свободной границы. Этот случай более сложный. Установлено, что смешанная граничная задача также сводится к парному сумматорному функциональному уравнению в стандартной форме, но векторному.

Проведен численный эксперимент. Получено решение системы линейных алгебраических уравнений для задачи дифракции упругой волны в полуплоскости с первым вариантом граничных условий. Результаты счета подтверждают полученные теоретические выводы третьего параграфа диссертации.

В четвертом параграфе получены условия разрешимости переопределенной граничной

задачи для системы уравнений теории упругости в полуплоскости – условий на границе задано больше, чем нужно для выделения единственного решения. Установлено, что построенное ранее вспомогательное интегрально-сумматорное тождество является одной из форм условия разрешимости переопределенной задачи. С помощью условия разрешимости переопределенной задачи показано, что задача дифракции упругой волны на отслоениях упругой полуплоскости от жесткого основания может иметь только одно решение. На основании этого доказано, что решение задачи дифракции упругой квазипериодической волны на периодической системе неоднородностей, размещенных на границе упругой полуплоскости, может быть только квазипериодической функцией.

Во второй главе рассмотрены задачи сопряжения для системы уравнений плоской теории упругости в плоскостной среде. Общая постановка задачи дана в пятом параграфе. На прямых, разделяющих плоскость на полосы и две полуплоскости, задаются условия сопряжения: условия непрерывности перемещений и напряжений, соответствующие способу взаимодействия слоев) или смешанные условия при наличии дефектов. В качестве дефектов выбраны периодические системы жестких пластин (с различными условиями контакта с упругой средой) или трещин. В шестом параграфе сведена к парному сумматорному функциональному уравнению, сведена к интегральным уравнениям и бесконечной системе линейных алгебраических уравнений задача сопряжения в случае, когда полный контакт двух упругих полуплоскостей нарушен вдоль периодической системы отслоений, вдоль которых полуплоскости скользят без трения относительно друг друга. Парное уравнение, интегральные уравнения и БСЛАУ имеют точно такую же форму, что и в граничных задачах для полуплоскости.

Показано, как использовать векторные представления общих решений системы уравнений теории упругости при исследовании задач сопряжения двух полуплоскостей. Такой подход имеет существенные преимущества в случае, когда условия сопряжения иные: полный контакт полуплоскостей на периодической системе дефектов и жесткий контакт с экранами вдоль остальной части общей границы. Установлено, что такая задача сопряжения сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению.

В седьмом параграфе рассмотрен случай, когда слоистая плоскость разделена на три части или на большее число частей. Существенное отличие состоит в том, что в решении системы уравнений теории упругости в полосе, ограниченной по поперечной координате, содержатся слагаемые и положительной ориентации, и отрицательной ориентации. Подробно рассмотрены две задачи. Во-первых, задача дифракции упругой волны на упругом слое, расположенном на жестком основании, при наличии периодической системы дефектов на



границе слоя и основания. Как и при сопряжении двух упругих плоскостей, решение задачи дифракции ищется в виде суммы решений двух подзадач. Первая подзадача – задача об отражении упругой волны от слоя, лежащего на жестком основании (без дефектов). Вторая подзадача – задача о возмущении упругого поля в слоистой среде от дефектов. Решение первой подзадачи строится в явном виде, а вторая подзадача сводится к парному сумматорному функциональному уравнению, но в стандартной форме. Во-вторых, в седьмом параграфе рассмотрена задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, размещенных между двумя упругими слоями, покоящимися на жестком основании. Показано, как может быть получено векторное ПСФУ в стандартной форме.

Задача сопряжения для системы уравнений плоской теории упругости в многослойной среде в самом общем случае также может быть сведена к векторному ПСФУ в стандартной форме. В конце параграфа сформулированы три правила, которые рекомендуется использовать при решении разрывных периодических задач сопряжения.

В третьей главе рассмотрены граничные задачи для системы уравнений трехмерной теории упругости в полупространстве в классе двоякопериодических функций. Общая схема рассуждений такая же, как в первых двух главах. В восьмом параграфе получено общее решение системы уравнений для коэффициентов Флоке, квазипериодического по двум переменным упругого поля. Выделены шесть типов элементарных волн Флоке. В девятом параграфе из системы уравнений трехмерной теории упругости выведена связь между плотностью энергии и плотностью потока энергии (закон сохранения энергии). Исследованы энергетические характеристики элементарных волн. По аналогии с двумерным случаем введено понятие ориентированной волны.

В десятом параграфе подробно рассмотрены основные граничные задачи для системы уравнений теории упругости в классе квазипериодических ориентированных решений в полупространстве, к которым сводятся задачи об отражении упругой волны от границы упругого полупространства при различных условиях взаимодействия полупространства с основанием. Найдены условия разрешимости двух переопределенных граничных задач. В первой задаче на границе полупространства задается шесть граничных условий – для всех компонент вектора перемещений и трех компонент тензора напряжений. Во второй переопределенной задаче рассматриваются только четыре граничные функции (и дополнительно задано одно однородное граничное условие).

Показано, что различные варианты задачи дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов, размещенных на границе упругого полупространства, сводятся к парным сумматорным функциональным уравнениям. В зависимости от условий взаимо-

действия полупространства с основанием и от характера дефектов, парные уравнения могут быть или скалярными, или векторными. Построено интегрально-сумматорное тождество для случая двух пространственных переменных, с помощью которого парное сумматорное уравнение преобразуется к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Флоке отраженной волны. В последнем параграфе главы кратко рассмотрен один частный случай задачи сопряжения двух упругих полупространств – задача об отражении и преломлении упругой волны на плоской границе раздела сред.

На защиту выносятся следующие новые результаты.

1. Для граничных задач и задач сопряжения для системы дифференциальных уравнений с частными производными, которые возникают в теории распространения и дифракции гармонических упругих волн в слоистых средах с периодическими системами неоднородностей, разработан метод сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

2. Доказана теорема единственности решения задачи дифракции упругой волны на отсложении упругой полуплоскости от жесткого основания. Установлено, что решение граничной задачи для системы дифференциальных уравнений плоской теории упругости, к которой сводится задача дифракции упругой квазипериодической волны, может быть только квазипериодическим.

3. Построены решения основных граничных задач для системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости в классе функций, квазипериодических по двум переменным. Найдены условия разрешимости двух переопределенных граничных задач.

4. Показано, что граничные задачи с неоднородными условиями на границе для системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости, когда решение ищется в виде квазипериодических по двум переменным функций, сводятся к скалярным или векторным парным сумматорным функциональным уравнениям.

Полученные результаты докладывались на Четвертой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2005" (Казань, 16-18 декабря 2005 г.), на Пятой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2006" (Казань, 16-18 декабря 2006 г.), на Итоговой научно-образовательной конференции студентов Казанского государственного университета 2006 года (Казань, 25-30 января 2007 г.), на Всероссийской конференции "СамДиф-2009" (Самара, 29 июня - 2 июля 2009 г.), на Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школе "Математика и математическое моделирование" (Саров, 19-22 апре-

ля 2010 г.), на Российской летней школе "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" (Казань-Яльчик, 6-10 сентября 2010 г.), на Девятой молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2010" (Казань, 1-6 октября 2010 г.), на Пятой Всероссийской молодежной научно-инновационной школе "Математика и математическое моделирование" (Саров, 11-14 апреля 2011 г.), на международной конференции "Days on Diffraction'2011" (Санкт-Петербург, 30 мая-3 июня, 2011 г.), на тридцать втором международном форуме "Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)" (Москва, 19-23 августа, 2012 г.), на четырнадцатой международной конференции "Mathematical Methods in Electromagnetic Theory(MMET)" (Харьков, 28-30 августа, 2012 г.)

Основные результаты первой главы диссертации опубликованы в работах [29, 30, 31] и [37, 62, 63]. Результаты второй главы – в работах [33, 36, 45]. Результаты третьей главы опубликованы в работах [32, 34, 35, 38, 39, 76]. В работах [62, 63] автору принадлежат результаты, относящиеся к решению задач дифракции упругих волн на периодических системах неоднородностей. Результаты остальных совместных публикаций принадлежат авторам в равных долях.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору Н.Б. Плещинскому за постановку задач и помощь в проведении исследований.

# Глава 1. Упругие волны Флоке в полуплоскости

В первой главе диссертации построено общее решение системы уравнений двумерной теории упругости в классе квазипериодических функций (волны Флоке), выделены частные решения различных типов и исследованы их энергетические характеристики. Рассмотрены задачи дифракции упругой волны, падающей на границу полуплоскости с периодическими системами дефектов. Парные сумматорные уравнения для коэффициентов Флоке сведены к интегральным уравнениям и к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений в двух формах – в скалярной и в векторной. Показано, что решение задачи дифракции волны Флоке на периодической системе неоднородностей на границе полуплоскости может быть только квазипериодической функцией.

## 1. Квазипериодические решения плоской теории упругости

В первом параграфе диссертации получено общее решение системы уравнений двумерной теории упругости в классе функций, гармонически зависящих от времени и квазипериодических по одной из пространственных координат.

### 1.1. Уравнения плоской теории упругости

В двумерном (или плоском) случае в декартовой системе координат состояние упругого напряженно-деформируемого тела описывают пять функций пространственных координат  $x, y$  и времени  $t$ : нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$ , касательное напряжение  $\tau$  (или напряжение кручения) и перемещения  $u_x, u_y$ . Если зависимость между напряжениями и деформациями (которые мы считаем вспомогательными функциями) задана в форме закона Гука, то основные уравнения плоской теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \\ \sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе, определяющие ее упругие свойства (см., например, [52]).  $\rho, \lambda, \mu$  – заданные положительные константы.

При гармонической зависимости от времени вида  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота колебаний, комплексные амплитуды напряжений и перемещений должны удовлетворять системе

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \rho \omega^2 u_x &= 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho \omega^2 u_y = 0, \\ \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В дальнейшем будем использовать одни и те же обозначения для вещественнозначных функций – решений системы уравнений (1.1) и для их комплексных амплитуд – решений системы уравнений (1.2). Напомним, что вещественнозначная функция  $f(x, y, t)$  (при гармонической зависимости от времени) находится по своей комплексной амплитуде по формуле

$$f(x, y, t) = \operatorname{Re}[f(x, y)e^{i\omega t}].$$

В некоторых случаях удобно перейти к системе уравнений Ламе только для перемещений

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho \omega^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \rho \omega^2 u_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если ввести новые искомые функции – продольный и поперечный потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  так, что

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то система уравнений плоской теории упругости сведется к двум уравнениям Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_2^2 \psi = 0, \quad (1.4)$$

здесь  $k_1$  и  $k_2$  – волновые числа,

$$k_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}. \quad (1.5)$$

Будем считать в дальнейшем, что все параметры упругой среды – вещественные числа. Легко видеть, что  $k_1 < k_2$ .

Любая двумерная упругая волна представляет собой сумму двух волн: продольной и поперечной. Решения системы уравнений теории упругости, для которых потенциал  $\psi = 0$ , называют продольными упругими волнами, а для которых  $\varphi = 0$ , называют поперечными волнами. Скорость распространения у продольных и у поперечных волн различна.

Легко проверить, что упругая волна является продольной тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, упругая волна является поперечной тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

В диссертации рассматриваются решения системы уравнений теории упругости специального вида. В двумерном случае решение системы уравнений (1.2) отыскивается как набор комплекснозначных функций  $\sigma_x, \sigma_y, \tau, u_x, u_y$ , каждая из которых имеет вид

$$f(x, y) = e^{i\alpha x} f_0(x, y),$$

где  $\alpha$  – некоторое число (параметр Флоке),  $f_0(x, y)$  – периодическая по  $x$  с периодом  $l$  функция. Параметры  $\alpha$  и  $l$  – одни и те же для всех компонент решения. Такие решения будем называть квазипериодическими.

Квазипериодические решения уравнений теории упругости будем для краткости называть упругими волнами Флоке. Будем также предполагать в дальнейшем, что все рассматриваемые периодические функции разлагаются по переменной  $x$  в ряд Фурье, сумму которого можно почленно дифференцировать (сходимость в общем случае понимается в обобщенном смысле). Таким образом, компоненты решений уравнений (1.2) будем искать в виде

$$f(x, y) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(y) e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(y) e^{iL_n x}, \quad (1.6)$$

где

$$L_n = \alpha + \frac{2\pi}{l}n.$$

## 1.2. Теория Флоке

Обсудим важный вопрос: почему решения задач дифракции волн на периодических системах неоднородностей можно искать в виде волн Флоке? Такой подход используется достаточно часто, например, в электродинамике, но вместо математически строгого обоснования обычно приводятся интуитивные рассуждения. Иногда утверждается, что квазипериодичность искомых функций является следствием ”теоремы Флоке”.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [56, с.78]) хорошо известно, что фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами может быть найдена в виде  $Y(t) = Z(t)\exp(Rt)$ , где  $Z(t)$  – периодическая матрица, а  $R$  – постоянная матрица. Следовательно, любое решение такой системы является линейной комбинацией квазипериодических функций.

Аналогичное утверждение (теорема Флоке-Ляпунова) приведено в обзорной статье [23] и в монографии [73] П. Кучмента (см. также [18, п. 12.1]). Система обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами с помощью замены искомых функций

сводится к системе уравнений с постоянными коэффициентами, решения которой могут быть найдены методом Эйлера как произведения экспоненциальных функций вида  $\exp(i\lambda t)$  и полиномов. Обратная замена приводит к квазипериодическим функциям, которые называют решениями Флоке, а в частном случае (полиномы нулевой степени) – волнами Блоха (см. [2, гл. 8]). Как отмечает П. Кучмент, теорема Флоке-Ляпунова не переносится очевидным образом на уравнения с частными производными.

Теория Флоке в ее классической форме ([70, п. 2.4]) непосредственно не может быть применена к периодическим задачам дифракции волн. Дело в том, что задачи поиска электромагнитных или упругих волн в волноводных структурах с периодическими системами неоднородностей ставятся как граничные задачи для уравнений с частными производными, но периодическими в этих задачах являются не коэффициенты уравнений, а граничные условия – точнее, их коэффициенты и правые части. Тем не менее, волны Флоке появляются и в этом случае.

Вообще говоря, условие квазипериодичности можно включить в постановку задач дифракции волн на периодических системах неоднородностей из физических соображений. Но если для рассматриваемой задачи доказано, что она может иметь только одно решение (теорема единственности), и удалось найти ее квазипериодическое решение, то, разумеется, не имеет смысла искать другие решения.

В конце главы будет доказано более сильное утверждение. Будет установлено, что решение задачи дифракции упругой волны Флоке на периодической системе неоднородностей на границе полуплоскости может быть только квазипериодической функцией. Доказательство этого факта возможно только после некоторой подготовки.

### 1.3. Квазипериодические решения системы уравнений 1-го порядка

Подставим разложения напряжений и перемещений вида (1.6) в уравнения (1.2). Коэффициенты Флоке искомых функций должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} iL_n\sigma_{xn}(y) + \tau'_n(y) + \rho\omega^2 u_{xn}(y) &= 0, & iL_n\tau_n(y) + \sigma'_{yn}(y) + \rho\omega^2 u_{yn}(y) &= 0, \\ \sigma_{xn}(y) &= \lambda u'_{yn}(y) + iL_n(\lambda + 2\mu)u_{xn}(y), & \sigma_{yn}(y) &= (\lambda + 2\mu)u'_{yn}(y) + iL_n\lambda u_{xn}(y), \\ \tau_n(y) &= \mu u'_{xn}(y) + i\mu L_n u_{yn}(y). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим, что в уравнениях (1.7) не содержится производная функции  $\sigma_{xn}(y)$ . Исключим эту функцию из системы уравнений и перепишем оставшиеся четыре уравнения в нормальной

форме:

$$u'_{xn} = \frac{1}{\mu}\tau_n - iL_n u_{yn}, \quad u'_{yn} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\sigma_{yn} - iL_n \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}u_{xn}, \quad (1.8)$$

$$\sigma'_{yn} = -iL_n\tau_n - \rho\omega^2 u_{yn}, \quad \tau'_n = -iL_n \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{yn} + \left[4\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}L_n^2 - \rho\omega^2\right]u_{xn}.$$

Найдем общее решение для системы дифференциальных уравнений первого порядка (1.8).

Обозначим

$$\beta_{jn} = \sqrt{k_j^2 - L_n^2} = \begin{cases} |L_n| \geq k_j : & i\sqrt{L_n^2 - k_j^2}; \\ |L_n| \leq k_j : & -\sqrt{k_j^2 - L_n^2}, \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Такое определение значений  $\beta_{jn}$  согласовано с тем, как в работе [48] выбраны однозначные ветви многозначных функций  $\beta_j(\xi)$ .

Матрица коэффициентов системы уравнений (1.8) имеет собственные значения

$$\pm i\beta_{1n}, \quad \pm i\beta_{2n},$$

им соответствуют собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_n^{1,2} &= \left( \pm L_n, \quad \beta_{1n}, \quad \pm i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2), \quad 2i\mu\beta_{1n}L_n \right), \\ \mathbf{h}_n^{3,4} &= \left( \beta_{2n}, \quad \mp L_n, \quad -2i\mu\beta_{2n}L_n, \quad \pm i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) \right). \end{aligned}$$

Поэтому легко найти фундаментальную систему решений системы уравнений (1.8) и, следовательно, общее квазипериодическое решение системы уравнений (1.2).

Возможен случай, когда одно из чисел  $\beta_{jn}$  обращается в нуль. Тогда среди простых собственных значений матрицы появится кратное собственное значение. Эта ситуация в дальнейшем рассматриваться не будет.

**Теорема 1.1.** *Общее квазипериодическое решение системы уравнений (1.2) имеет вид*

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n L_n e^{i\beta_{1n}y} - B_n L_n e^{-i\beta_{1n}y} + C_n \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} + D_n \beta_{2n} e^{-i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ u_y(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} + B_n \beta_{1n} e^{-i\beta_{1n}y} - C_n L_n e^{i\beta_{2n}y} + D_n L_n e^{-i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_n^2) (A_n e^{i\beta_{1n}y} - B_n e^{-i\beta_{1n}y}) + \right. \\ &\quad \left. + 2i\mu L_n \beta_{2n} (C_n e^{i\beta_{2n}y} + D_n e^{-i\beta_{2n}y}) \right] e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) (A_n e^{i\beta_{1n}y} - B_n e^{-i\beta_{1n}y}) - \right. \\ &\quad \left. - 2i\mu L_n \beta_{2n} (C_n e^{i\beta_{2n}y} + D_n e^{-i\beta_{2n}y}) \right] e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2i\mu L_n \beta_{1n} (A_n e^{i\beta_{1n}y} + B_n e^{-i\beta_{1n}y}) + \right. \\ &\quad \left. + i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) (C_n e^{i\beta_{2n}y} - D_n e^{-i\beta_{2n}y}) \right] e^{iL_n x}, \end{aligned} \quad (1.9)$$



где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  – произвольные постоянные.

Таким образом, любая упругая волна Флоке представляет собой бесконечную сумму гармоник Флоке. Каждая гармоника Флоке, в свою очередь, является наложением четырех элементарных волн (линейной комбинацией четырех слагаемых).

Выпишем компоненты элементарных упругих волн Флоке:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = L_n e^{i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, & u_y(x, y) = \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) = i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_n^2) e^{i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) = i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) e^{i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) = 2i\mu L_n \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}. \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} u_x(x, y) = -L_n e^{-i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, & u_y(x, y) = \beta_{1n} e^{-i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) = -i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_n^2) e^{-i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) = -i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) e^{-i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) = 2i\mu L_n \beta_{1n} e^{-i\beta_{1n}y} e^{iL_n x}. \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, & u_y(x, y) = -L_n e^{i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) = 2i\mu L_n \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) = -2i\mu L_n \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) = i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) e^{i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}. \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \beta_{2n} e^{-i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, & u_y(x, y) = L_n e^{-i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) = 2i\mu L_n \beta_{2n} e^{-i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) = -2i\mu L_n \beta_{2n} L_n e^{-i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) = -i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) e^{-i\beta_{2n}y} e^{iL_n x}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Первые две элементарные волны (будем называть их волнами типа А и типа В) являются продольными, а вторые две (типа С и типа D) – поперечными. Некоторые свойства элементарных волн будут исследованы ниже.

#### 1.4. Квазипериодические решения системы уравнений Ламе

Покажем, как можно получить элементарные упругие волны Флоке различных типов из системы уравнений Ламе (1.3).

Будем искать решения уравнений (1.3) в виде (1.6). Коэффициенты Флоке функций  $u_x(x, y)$  и  $u_y(x, y)$  должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных урав-

нений 2-го порядка

$$\begin{aligned} \mu u''_{xn}(y) + (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)L_n^2) u_{xn}(y) + iL_n(\lambda + \mu)u'_{yn}(y) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)u''_{yn}(y) + iL_n(\lambda + 2\mu)u'_{xn}(y) + (\rho\omega^2 - \mu L_n^2) u_{yn}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Введем новые искомые функции

$$v_{1n}(y) = u_{xn}(y), \quad v_{2n}(y) = u'_{xn}(y), \quad v_{3n}(y) = u_{yn}(y), \quad v_{4n}(y) = u'_{yn}(y)$$

и перейдем от системы уравнений 2-го порядка к системе обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} v'_{1n}(y) &= v_{2n}(y), \\ \mu v'_{2n}(y) + [\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)L_n^2] v_{1n}(y) + i(\lambda + \mu)L_n v_{4n}(y) &= 0, \\ v'_{3n}(y) &= v_{4n}(y), \\ (\lambda + 2\mu)v'_{4n}(y) + [\rho\omega^2 - \mu L_n^2] v_{3n}(y) + i(\lambda + \mu)L_n v_{2n}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Пусть вектор-функция  $\mathbf{v}_n(y) = (v_{1n}(y), v_{2n}(y), v_{3n}(y), v_{4n}(y))$ . Запишем систему уравнений (1.15) в нормальной форме  $\mathbf{v}'_n(y) = \mathbf{A} \mathbf{v}_n(y)$ , где матрица коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\beta_{1n}^2 & 0 & 0 & -i\frac{\lambda + \mu}{\mu}L_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}L_n & -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\beta_{2n}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{A}$  имеет собственные значения  $\pm i\beta_{1n}$ ,  $\pm i\beta_{2n}$  и соответствующие им собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n^{1,2} &= (\pm L_n, \quad i\beta_{1n}L_n, \quad \beta_{1n}, \quad \pm i\beta_{1n}^2), \\ \mathbf{g}_n^{3,4} &= (\beta_{2n}, \quad \mp i\beta_{2n}^2, \quad \mp L_n, \quad -i\beta_{2n}L_n). \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение системы уравнений (1.15) имеет вид

$$\mathbf{v}_n(y) = A_n \mathbf{g}_n^1 e^{i\beta_{1n}y} + B_n \mathbf{g}_n^2 e^{-i\beta_{1n}y} + C_n \mathbf{g}_n^3 e^{i\beta_{2n}y} + D_n \mathbf{g}_n^4 e^{-i\beta_{2n}y},$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  – произвольные постоянные. Отсюда

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n L_n e^{i\beta_{1n}y} - B_n L_n e^{-i\beta_{1n}y} + C_n \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} + D_n \beta_{2n} e^{-i\beta_{2n}y}] e^{iL_n x}, \\ u_y(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} + B_n \beta_{1n} e^{-i\beta_{1n}y} - C_n L_n e^{i\beta_{2n}y} + D_n L_n e^{-i\beta_{2n}y}] e^{iL_n x}. \end{aligned}$$

Функции напряжений можно найти по формулам (1.2).

Легко видеть, что построенное решение совпадает с решением (1.9) системы уравнений теории упругости 1-го порядка.

## 2. Энергия упругой волны

Волновые процессы в упругой среде связаны с явлением переноса энергии. Чтобы выяснить, в каком направлении упругая волна переносит энергию, нужно определить для упругой среды энергетические характеристики. Иногда это делается аксиоматически (исходя из физического смысла), но более естественно вывести из системы уравнений теории упругости равенство, которое можно интерпретировать как закон сохранения энергии.

### 2.1. Закон сохранения энергии

Предположим, что в результате некоторых преобразований из системы исходных дифференциальных уравнений может быть получено равенство вида

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (2.1)$$

Тогда выражение  $E$  можно интерпретировать как плотность некоторой величины, а выражение  $\mathbf{\Pi}$  – как плотность потока этой величины (вектор Умова-Пойнтинга). Равенство (2.1) в этом случае представляет собой закон сохранения энергии (в дифференциальной форме), см. [24, §5]. Если проинтегрировать это равенство по некоторой области, то, после замены интеграла по области на интеграл по ее границе, получится, что изменение суммарного значения величины  $E$  в области точно равно потоку этой величины через границу области.

В книге С.К. Годунова [10, с. 65], показано, как вывести закон сохранения энергии в случае системы уравнений, описывающих акустические волны. Закон сохранения энергии электромагнитного поля также выводится из системы уравнений Максвелла, см., например, [27, §8]. Заметим, что в электродинамике принято называть вектор потока энергии вектором Пойнтинга, в гидродинамике – вектором Умова, а в остальных случаях – вектором Умова-Пойнтинга.

Закон сохранения энергии в случае упругих колебаний в работе Д.Н. Тумакова [55] выведен из системы уравнений Ламе. При этом отмечено, что можно получить несколько равенств вида (2.1), но только одно из них является искомым законом. Так как в динамической теории упругости хорошо известны формулы для вычисления потенциальной и кинетической энергии тела (см., например, [26, §24]), то при выводе закона сохранения энергии выражение для плотности энергии  $E$  упругой волны фактически уже задано. Тогда формулировка этого закона определена однозначно.

**Теорема 2.1.** *Если  $u_x, u_y, \sigma_x, \sigma_y, \tau$  – решение системы уравнений (1.1), то имеет место равенство вида (2.1):*

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial u_y}{\partial t} \tau \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_y \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

(закон сохранения энергии).

Доказательство. Составим линейную комбинацию уравнений из системы уравнений (1.1).

Слева выписаны уравнения, а справа – соответствующие им множители:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 & \times \frac{\partial u_x}{\partial t} & + \\
& \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 & \times \frac{\partial u_y}{\partial t} & + \\
& \sigma_x - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \times \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} & + \\
& \sigma_y - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 & \times \frac{\partial^2 u_y}{\partial t \partial y} & + \\
& \tau - \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 & \times \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial t \partial y} & .
\end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых получим формулу (2.2).

Таким образом, для упругой волны плотность энергии

$$E = E(x, y, t) = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \tag{2.3}$$

$$+ \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

и плотность потока энергии

$$\Pi = \Pi(x, y, t) = - \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial u_y}{\partial t} \tau, \frac{\partial u_x}{\partial t} \tau + \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_y \right). \tag{2.4}$$

Среднее значение (по периоду изменения времени  $T = 2\pi/\omega$ ) вектора Умова-Пойнтинга

$$\overline{\Pi}(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) dt$$

легко выразить через комплексные амплитуды напряжений и перемещений. При зависимости от времени вида  $\exp(i\omega t)$

$$\overline{\Pi}(x, y) = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \left( u_x^* \sigma_x + u_y^* \tau, u_x^* \tau + u_y^* \sigma_y \right), \tag{2.5}$$

здесь  $*$  – знак комплексного сопряжения.

## 2.2. Плотность потока энергии

Переносят ли энергию элементарные гармоники Флоке (1.10)–(1.13)? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вычислить для каждой из этих волн среднее значение вектора Умова-Пойнтинга по формуле (2.5). В дальнейшем будет существенно, как направлен поток энергии элементарных волн по отношению к прямым  $y = \text{const}$ .

Будем говорить, что упругая волна положительно ориентирована по отношению к прямой, если она переносит энергию в направлении положительной нормали к ней или (и) затухает в этом направлении. Отрицательно ориентированная волна переносит энергию или (и) затухает в противоположном направлении. Для прямых  $y = \text{const}$  направление положительной нормали совпадает с направлением оси  $y$ .

**Теорема 2.2.** *Элементарные гармоники Флоке типов  $A$  и  $C$  положительно ориентированы по отношению к прямой  $y = 0$ , а гармоники типов  $B$  и  $D$  – отрицательно ориентированы. При вещественных значениях постоянных  $\beta_{jn}$  элементарные гармоники переносят энергию, а при мнимых значениях постоянных  $\beta_{jn}$  элементарные гармоники затухают.*

Доказательство. Для элементарной гармоники Флоке типа  $A$  компоненты среднего значения вектора Умова-Пойнтинга

$$\bar{\Pi}_x(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{1n}y} L_n \left( 2\mu L_n^2 + \lambda k_1^2 + 2\mu |k_1^2 - L_n^2| \right),$$

$$\bar{\Pi}_y(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{1n}y} \text{Re } \beta_{1n} \rho \omega^2.$$

Если  $\beta_{1n}$  – вещественное число, то значения  $\bar{\Pi}_x$  и  $\bar{\Pi}_y$  не зависят от  $y$ , причем  $\bar{\Pi}_y > 0$ . Если же  $\beta_{1n}$  – чисто мнимое число, то  $\bar{\Pi}_y = 0$  (энергия в направлении оси  $y$  не переносится), а  $\bar{\Pi}_x \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow +\infty$ .

Остальные типы гармоник имеют аналогичные свойства. Для гармоники типа  $B$  компоненты вектора  $\bar{\Pi}$

$$\bar{\Pi}_x(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{1n}y} L_n \left( 2\mu L_n^2 + \lambda k_1^2 + 2\mu |k_1^2 - L_n^2| \right),$$

$$\bar{\Pi}_y(x, y) = \frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{1n}y} \text{Re } \beta_{1n} \rho \omega^2,$$

для гармоники типа  $C$

$$\bar{\Pi}_x(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{2n}y} L_n \left( 2\mu L_n^2 - \rho \omega^2 + 2\mu |k_2^2 - L_n^2| \right),$$

$$\bar{\Pi}_y(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{2n}y} \text{Re } \beta_{2n} \rho \omega^2,$$

и для гармоника типа  $D$

$$\overline{\Pi}_x(x, y) = -\frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{2n}y} L_n \left( 2\mu L_n^2 - \rho\omega^2 + 2\mu|k_2^2 - L_n^2| \right),$$

$$\overline{\Pi}_y(x, y) = \frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{2n}y} \text{Re } \beta_{2n} \rho\omega^2.$$

Будем говорить, что формулы (1.9) определяют волну, положительно ориентированную по отношению к прямой  $y = 0$ , если  $B_n = 0$  и  $D_n = 0$  при всех  $n$ , и волну, отрицательно ориентированную по отношению к прямой  $y = 0$ , если  $A_n = 0$  и  $C_n = 0$  при всех  $n$ . В такой форме в дальнейшем будем задавать условия излучения (условия на бесконечности) для квазипериодических упругих волн. Ориентированные волны будем также называть уходящими и приходящими.

Как известно, энергетические характеристики волн в общем случае не являются аддитивными функциями: например, вектор Умова-Пойнтинга суммы двух волн не всегда совпадает с суммой векторов Умова-Пойнтинга отдельных слагаемых.

Вычислим поток энергии упругой волны Флоке через отрезок  $[0, l]$  прямой  $y = 0$ . Из формулы (2.5) следует, что

$$P = \int_0^l \overline{\Pi}_y(x, 0) dx = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \int_0^l \left[ u_x^*(x, 0) \tau(x, 0) + u_y^*(x, 0) \sigma_y(x, 0) \right] dx.$$

Будем называть эту величину потоком энергии упругой волны через период.

Если напряжения и перемещения являются квазипериодическими функциями

$$u_x(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{x,n}(y) e^{iL_n x}, \quad \tau(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_n(y) e^{iL_n x},$$

$$u_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{y,n}(y) e^{iL_n x}, \quad \sigma_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{y,n}(y) e^{iL_n x},$$

то при вещественных  $\alpha$

$$P = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \int_0^l \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_{x,m}^*(0) e^{-iL_m x} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_n(0) e^{iL_n x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_{y,m}^*(0) e^{-iL_m x} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{y,n}(0) e^{iL_n x} \right] dx =$$

$$= -\frac{\omega l}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Im} \left[ u_{x,n}^*(0) \tau_n(0) + u_{y,n}^*(0) \sigma_{y,n}(0) \right].$$

Так как для положительно ориентированной волны ( $B_n = 0$ ,  $D_n = 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\begin{aligned} u_{x,n}(0) &= A_n L_n + C_n \beta_{2n}, & \tau_n(0) &= i A_n \left[ 2\mu \beta_{1n} L_n + C_n (\rho \omega^2 - 2\mu L_n^2) \right], \\ u_{y,n}(0) &= A_n \beta_{1n} - C_n L_n, & \sigma_{y,n}(0) &= i A_n \left[ (\rho \omega^2 - 2\mu L_n^2) - 2C_n \mu \beta_{2n} L_n \right], \end{aligned}$$

то

$$P = -\frac{l}{2} \rho \omega^3 \sum_n \left[ \operatorname{Re} \beta_{1n} |A_n|^2 + \operatorname{Re} \beta_{2n} |C_n|^2 \right].$$

Заметим, что в этой сумме учитывается только конечное число слагаемых, в которых  $\beta_{jn}$  – вещественные (отрицательные) числа. Для отрицательно ориентированной волны

$$P = \frac{l}{2} \rho \omega^3 \sum_n \left[ \operatorname{Re} \beta_{1n} |B_n|^2 + \operatorname{Re} \beta_{2n} |D_n|^2 \right].$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.3.** *Для упругой ориентированной квазипериодической волны поток энергии через период равен сумме потоков энергии через период отдельных гармоник.*

### 3. Дифракция упругой волны на границе полуплоскости с периодической системой дефектов

Исследуем двумерные граничные задачи для системы уравнений теории упругости в верхней полуплоскости, описывающие процесс дифракции упругой волны Флоке на периодических системах дефектов, расположенных на границе полуплоскости. Покажем, что парные сумматорные функциональные уравнения относительно коэффициентов Флоке искомой квазипериодической волны могут быть сведены к некоторым бесконечным системам линейных алгебраических уравнений или к интегральным уравнениям.

#### 3.1. Постановка задачи дифракции

В двумерных задачах предполагается, что состояние упругой среды в полупространстве  $y > 0$  не зависит от координаты  $z$ . Поэтому можно говорить в дальнейшем о колебаниях упругой полуплоскости, а не полупространства.

Пусть отрицательно ориентированная упругая волна от бесконечно удаленного источника набегаёт сверху на границу упругой полуплоскости. При отражении волны от границы появляется уходящая на бесконечность положительно ориентированная упругая волна того же типа. Если на различных участках прямой  $y = 0$  заданы различные условия, связывающие следы участвующих в процессе упругих волн, то наблюдается явление дифракции – уходящая вверх волна представляет собой наложение бесконечного множества элементарных волн.

Особый интерес представляют смешанные граничные задачи, в которых на разных участках границы полуплоскости  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  задаются разные граничные условия. В  $l$ -периодическом случае достаточно разделить на две части  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  промежуток  $[0, l)$  (см. рис. 3.1). В общем случае эти части могут состоять из любого конечного числа промежутков.

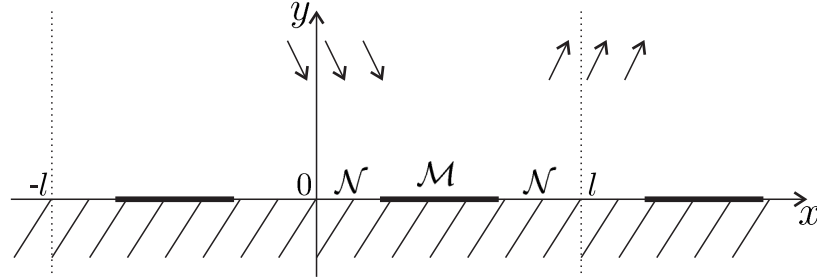


Рис. 3.1. Упругая полуплоскость с системой дефектов на границе

Граничные условия на участках границы упругой полуплоскости должны соответствовать физическому смыслу задачи дифракции. В качестве первого варианта таких условий примем следующие. Пусть на  $\mathcal{N}$  верхняя полуплоскость находится в полном контакте с жестким основанием, а на  $\mathcal{M}$  заданы условия скольжения без трения. Условимся рассматривать  $\mathcal{M}$  как дефект: упругая полуплоскость была прикреплена к жесткому основанию, но отслоилась от него на участке  $\mathcal{M}$ . С другой стороны, часть  $\mathcal{N}$  промежутка  $[0, l)$  также можно рассматривать как дефект: упругая полуплоскость сначала скользила по основанию, но потом приклеилась к нему вдоль  $\mathcal{N}$ .

В общем случае задача дифракции упругой волны ставится следующим образом. Пусть на границу упругой полуплоскости с системой дефектов набегают отрицательно ориентированная упругая волна  $u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, \sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau^{(0)}$ . Нужно найти положительно ориентированную упругую волну  $u_x, u_y, \sigma_x, \sigma_y, \tau$ , образующуюся в процессе ее дифракции.

В рассматриваемом сейчас случае условия контакта упругой полуплоскости с жестким основанием задаются так:

$$u_x^{(0)}(x, 0) + u_x(x, 0) = 0, \quad u_y^{(0)}(x, 0) + u_y(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{N}, \quad (3.1)$$

$$u_y^{(0)}(x, 0) + u_y(x, 0) = 0, \quad \tau^{(0)}(x, 0) + \tau(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{M}. \quad (3.2)$$

Таким образом, нужно найти положительно ориентированное решение системы уравнений (1.2) в верхней полуплоскости, удовлетворяющее граничным условиям (3.1) и (3.2).

Класс искомых решений системы уравнений (1.2) в полуплоскости  $y > 0$  определим следующим образом:  $u_x, u_y, \sigma_x, \sigma_y, \tau$  – непрерывно дифференцируемые функции, предельные



значения которых при  $y \rightarrow 0 + 0$  существуют при  $x \in [0, l]$  всюду, кроме, может быть, конечного числа точек. Удобно считать, что при каждом фиксированном  $y$  значения функций  $u_x, u_y, \sigma_x, \sigma_y, \tau$  –  $l$ -периодические распределения. При  $y \rightarrow 0 + 0$  существуют их следы на прямой  $y = 0$  (предельные значения в обобщенном смысле).

### 3.2. Скалярные сумматорные и интегральные уравнения

Пусть падающая волна имеет компоненты

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, y) &= \left[ -B_s L_s e^{-i\beta_{1s}y} + D_s \beta_{2s} e^{-i\beta_{2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\ u_y^{(0)}(x, y) &= \left[ B_s \beta_{1s} e^{-i\beta_{1s}y} + D_s L_s e^{-i\beta_{2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\ \sigma_x^{(0)}(x, y) &= i \left[ -B_s \left( \lambda k_1^2 + 2\mu L_s^2 \right) e^{-i\beta_{1s}y} + 2D_s \mu \beta_{2s} L_s e^{-i\beta_{2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\ \sigma_y^{(0)}(x, y) &= i \left[ -B_s \left( \rho \omega^2 - 2\mu L_s^2 \right) e^{-i\beta_{1s}y} - 2D_s \mu \beta_{2s} L_s e^{-i\beta_{2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\ \tau^{(0)}(x, y) &= i \left[ 2B_s \mu L_s \beta_{1s} e^{-i\beta_{1s}y} - D_s \left( \rho \omega^2 - 2\mu L_s^2 \right) e^{-i\beta_{2s}y} \right] e^{iL_s x}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

то есть представляет собой сумму двух отрицательно ориентированных элементарных гармоник Флоке – продольной и поперечной волн с номерами  $s$ . Фактически такая гармоника представляет собой пару плоских волн разной поляризации с согласованными углами падения на плоскость  $y = 0$ . Здесь  $B_s$  и  $D_s$  – заданные комплексные числа.

Будем искать составляющие уходящей волны в виде

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n L_n e^{i\beta_{1n}y} + C_n \beta_{2n} e^{i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ u_y(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} - C_n L_n e^{i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ \sigma_x(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \left( \lambda k_1^2 + 2\mu L_n^2 \right) e^{i\beta_{1n}y} + 2C_n \mu \beta_{2n} L_n e^{i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ \sigma_y(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \left( \rho \omega^2 - 2\mu L_n^2 \right) e^{i\beta_{1n}y} - 2C_n \mu \beta_{2n} L_n e^{i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\ \tau(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2A_n \mu L_n \beta_{1n} e^{i\beta_{1n}y} + C_n \left( \rho \omega^2 - 2\mu L_n^2 \right) e^{i\beta_{2n}y} \right] e^{iL_n x}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим предварительно два предельных случая, соответствующих задачам об отражении упругих волн от границы упругой полуплоскости без дефектов.

**Теорема 3.1.** *Если упругая полуплоскость находится в полном контакте с жестким основанием вдоль всей границы, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с номером  $s$ . Если упругая полуплоскость скользит без трения по жесткому основанию, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с номером  $s$ .*

Доказательство. В первом случае на всей оси  $x$  должны быть выполнены равенства

$$\begin{aligned} (-B_s L_s + D_s \beta_{2s}) e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n L_n + C_n \beta_{2n}) e^{iL_n x} &= 0, \\ (B_s \beta_{1s} + D_s L_s) e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n \beta_{1n} - C_n L_n) e^{iL_n x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следовательно,  $A_n = 0$ ,  $C_n = 0$  при  $n \neq s$  и

$$\begin{aligned} A_s &= B_s \frac{L_s^2 - \beta_{1s} \beta_{2s}}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}} - D_s \frac{2\beta_{2s} L_s}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}}, \\ C_s &= B_s \frac{2\beta_{1s} L_s}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}} + D_s \left( \frac{L_s^2 - \beta_{1s} \beta_{2s}}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Во втором случае на всей оси  $x$  должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} (B_s \beta_{1s} + D_s L_s) e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n \beta_{1n} - C_n L_n) e^{iL_n x} &= 0, \\ \left[ 2\mu B_s \beta_{1s} L_s - D_s (\rho \omega^2 - 2\mu L_s^2) \right] e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2\mu A_n \beta_{1n} L_n + C_n (\rho \omega^2 - 2\mu L_n^2) \right] e^{iL_n x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда  $A_n = 0$ ,  $C_n = 0$  при  $n \neq s$  и

$$A_s = -B_s, \quad C_s = D_s.$$

Заметим, что здесь проявилось существенное отличие условий контакта упругой полуплоскости с жестким основанием. Если при полном контакте на границу раздела сред падает или только продольная, или только поперечная волна, то в отраженной волне присутствуют оба слагаемых – и продольное, и поперечное. При скольжении без трения поляризация отраженной волны такая же, как у падающей волны.

При наличии дефектов условия (3.5) должны быть выполнены при  $x \in \mathcal{N}$  и условия (3.6) – при  $x \in \mathcal{M}$ . Второе равенство из (3.5) и первое равенство из (3.6) совпадают. Поэтому

$$A_n \beta_{1n} - C_n L_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq s, \quad B_s \beta_{1s} + D_s L_s + A_s \beta_{1s} - C_s L_s = 0.$$

Исключим неизвестные  $A_n$ :

$$A_n = \frac{L_n}{\beta_{1n}} C_n \quad \text{при} \quad n \neq s, \quad A_s = \frac{L_s}{\beta_{1s}} (C_s - D_s) - B_s. \quad (3.7)$$

Тогда первое равенство из (3.5) дает

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \left( \frac{L_n^2}{\beta_{1n}} + \beta_{2n} \right) e^{iL_n x} = \left[ 2B_s L_s + D_s \left( \frac{L_s^2}{\beta_{1s}} - \beta_{2s} \right) \right] e^{iL_s x}, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (3.8)$$

а второе равенство из (3.6) сводится к

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{iL_n x} = D_s e^{iL_s x}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (3.9)$$

Имеет место

**Теорема 3.2.** *Граничная задача для системы уравнений (1.2) с условиями (3.1) и (3.2) в классе положительно ориентированных решений (задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе полуплоскости) сводится к парному сумматорному функциональному уравнению (3.8), (3.9).*

В работе Н.Б. Плещинского и Д.Н. Тумакова [49] показано, как перейти от аналогичного парного сумматорного функционального уравнения (ПСФУ) задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке из идеально проводящих бесконечно тонких лент к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) или к интегральному уравнению. Используем предложенную в этой работе методику.

Имеет смысл предварительно преобразовать ПСФУ (3.8), (3.9) так, чтобы в одной из его частей справа стоял нуль. С этой целью введем новые неизвестные

$$\tilde{C}_s = C_s - \frac{2B_s L_s \beta_{1s} + D_s (L_s^2 - \beta_{1s} \beta_{2s})}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}}, \quad \tilde{C}_n = C_n \quad \text{при} \quad n \neq s,$$

и обозначим

$$\gamma_n = \frac{L_n^2}{\beta_{1n}} + \beta_{2n}, \quad \widetilde{D}_s = \frac{2L_s (B_s \beta_{1s} + D_s)}{L_s^2 + \beta_{1s} \beta_{2s}}.$$

Поделим оба равенства ПСФУ на  $\exp(i\alpha x)$  и получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l} n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l} n x} = \widetilde{D}_s e^{i\frac{2\pi}{l} s x}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (3.11)$$

Переход к новым неизвестным имеет определенный физический смысл. Коэффициенты Флоке  $\tilde{C}_n$  соответствуют квазипериодической упругой волне, определяющей возмущение отраженного упругого волнового поля, порожденное периодической системой дефектов. Фактически решение задачи дифракции находится в виде двух слагаемых. Первое слагаемое представляет собой упругую волну, отраженную от границы упругой полуплоскости, находящейся в полном контакте с жестким основанием (не равны нулю только коэффициенты разложения в ряд с номером  $s$ ). Второе слагаемое представляет собой возмущение от системы дефектов, оно определяется из ПСФУ (3.10), (3.11).

Будем использовать в дальнейшем обозначения

$$I_k = \int_{\mathcal{M}} e^{i\frac{2\pi}{l}kt} dt, \quad J_k = \int_{\mathcal{N}} e^{i\frac{2\pi}{l}kt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.12)$$

Очевидно, что  $J_0 = l - I_0$  и  $J_k = -I_k$  при  $k \neq 0$ . Легко получить аналитические выражения для вычисления интегралов (3.12), в том числе, когда множество  $\mathcal{M}$  состоит из нескольких промежутков.

**Лемма 3.1.** *Для любого набора чисел  $Z_n$ , где  $n = 0, \pm 1, \dots$ , справедливо равенство (если имеют смысл бесконечные суммы)*

$$\int_0^l \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n Z_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \quad x \in (0, l). \quad (3.13)$$

Это утверждение следует из ортогональности системы функций  $\exp(i\frac{2\pi}{l}nx)$  на отрезке  $[0, l]$ .

Тогда с одной стороны значения суммы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

заданы на  $\mathcal{M}$  равенством (3.11), а с другой стороны из интегрально-сумматорного тождества (3.13) с учетом (3.10) следует, что на  $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} &= \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nt} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \tilde{C}_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} e^{i\frac{2\pi}{l}mx}. \end{aligned}$$

Перейдем от равенства функций на  $[0, l]$  к равенствам их коэффициентов Фурье и получим следующее утверждение.

**Теорема 3.3.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов сводится БСЛАУ*

$$l\tilde{C}_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \tilde{C}_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = \tilde{D}_s I_{s-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.14)$$

Левая часть БСЛАУ (3.14) совпадает с левой частью одной из бесконечных систем, полученных в работе [49] при исследовании задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке, некоторое отличие состоит в том, что числа  $\gamma_n$  определены иначе. В этой работе показано, что такие БСЛАУ являются регулярными – в том смысле, что их

единственное решение может быть получено методом усечения (редукции). Доказано, что последовательность решений конечных СЛАУ

$$l\tilde{C}_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-N}^N \gamma_n \tilde{C}_n \sum_{m=-M}^M \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = \tilde{D}_s I_{s-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.15)$$

сходится к точному решению БСЛАУ при  $M > N$ . Это утверждение сохраняется и в нашем случае, поскольку сходимость метода усечения зависит от поведения чисел  $\gamma_n$  при больших  $n$ . Для БСЛАУ (3.14) также  $\gamma_n \sim \text{const}|n|$  при  $n \rightarrow \pm\infty$ .

В работе [49] отмечено, что и при  $M = N$ , а в некоторых случаях и при  $M < N$ , наблюдается сходимость численного метода. В то же время, если непосредственно ПСФУ (3.10), (3.11) переписать как равенства коэффициентов Фурье стоящих в них функций, то получим БСЛАУ со свойствами операторного уравнения Фредгольма 1-го рода. В этом смысле метод интегрально-сумматорного тождества, использованный при преобразовании ПСФУ к БСЛАУ, следует рассматривать как один из методов регуляризации задачи.

Следуя работе [47, п. 7.2], обозначим

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}.$$

По построению числа  $\gamma_n \tilde{C}_n$  являются коэффициентами Фурье этой функции. Так как  $w(x) = 0$  при  $x \in \mathcal{N}$  в силу (3.10), то

$$\gamma_n \tilde{C}_n = \frac{1}{l} \int_{\mathcal{M}} w(t) e^{-i\frac{2\pi}{l}nt} dt, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Тогда из равенства (3.11) следует, что

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{M}} w(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{i\frac{2\pi}{l}n(x-t)} dt = \tilde{D}_s e^{i\frac{2\pi}{l}sx}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (3.16)$$

**Теорема 3.4.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе полуплоскости, сводится к интегральному уравнению (3.16) с логарифмической особенностью в ядре.*

Действительно, при  $|n| \rightarrow +\infty$  значение  $\gamma_n = O(|n|)$ . Тогда поведение ядра интегрального уравнения (3.16) при  $t \rightarrow x$  определяет слагаемое вида

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}n(x-t)}}{|n|} = -2 \ln \left[ 2 \sin \frac{\frac{2\pi}{l}|x-t|}{2} \right].$$

Для функции

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$$

также легко получить интегральное уравнение

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{N}} v(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{l}n(x-t)} dt = -\frac{1}{l} \widetilde{D}_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n I_{s-n} e^{i\frac{2\pi}{l}nx} \quad x \in \mathcal{N}, \quad (3.17)$$

с гиперсингулярным ядром.

Как и в случае задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке (см. [47, гл. 6]), в формулировке теоремы 3.4 не случайно сказано "сводится", (это относится и к уравнению (3.17)). Дело в том, что как только решения интегральных уравнений будут найдены, эти решения должны быть доопределены до всего интервала  $(0, l)$ :  $w(x) = 0$  при  $x \in \mathcal{N}$  и  $v(x) = \widetilde{D}_s e^{i\frac{2\pi}{l}nx}$  при  $x \in \mathcal{M}$ . Поэтому задача дифракции сводится фактически к двум интегральным уравнениям третьего рода.

Приближенные решения интегральных уравнений (3.16) и (3.17) могут быть найдены методом Галеркина. В качестве базисных элементов для уравнений с такими особенностями в ядрах обычно выбираются полиномы Чебышева первого и второго рода с весовыми функциями. Заметим, что расчетный алгоритм усложняется за счет того, что регулярная часть ядра (то, что остается после выделения главной особенности) представляет собой сумму сходящегося, но не быстро, ряда. Если же в качестве базисных функций выбирать экспоненты  $\exp(i\frac{2\pi}{l}kx)$ , то метод Галеркина приводит к решению конечной СЛАУ (3.15). Таким образом, целесообразно сводить рассматриваемую задачу дифракции упругой волны на периодической системе дефектов непосредственно к БСЛАУ.

### 3.3. Векторные сумматорные и интегральные уравнения

Прежде чем рассматривать более сложный вариант задачи дифракции упругих волн на периодической системе дефектов, расположенных на границе упругой плоскости, перейдем к векторным (векторно-матричным) представлениям перемещений и напряжений.

Пусть упругое поле определяет вектор-функция  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u_x, u_y, \sigma_y, \tau)$ . Отметим, что напряжение  $\sigma_x$  не используется в дальнейших рассуждениях, так как его следы не содержатся в рассматриваемых граничных условиях.

Общее решение системы уравнений (1.2) в соответствии с формулами (1.9) запишем в векторном виде

$$\mathbf{u}(x, y) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{A}_n \mathbf{E}_n^+ \mathbf{a}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{E}_n^- \mathbf{b}_n] e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \quad (3.18)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$  составлены из векторов  $\mathbf{h}_n^1$ ,  $\mathbf{h}_n^3$  и  $\mathbf{h}_n^2$ ,  $\mathbf{h}_n^4$  (см. п. 1.3) как из столбцов,

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} L_n & \beta_{2n} \\ \beta_{1n} & -L_n \\ i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) & -2i\mu\beta_{2n}L_n \\ 2i\mu\beta_{1n}L_n & i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} -L_n & \beta_{2n} \\ \beta_{1n} & L_n \\ -i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) & -2i\mu\beta_{2n}L_n \\ 2i\mu\beta_{1n}L_n & -i(\rho\omega^2 - 2\mu L_n^2) \end{pmatrix},$$

матрицы

$$\mathbf{E}_n^+(y) = \begin{pmatrix} e^{i\beta_{1n}y} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_{2n}y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_n^-(y) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_{1n}y} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_{2n}y} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{b}_n$  – некоторые двумерные векторы. Векторные коэффициенты  $\mathbf{a}_n$  соответствуют положительно ориентированным волнам, а коэффициенты  $\mathbf{b}_n$  – отрицательно ориентированным. Их компоненты имеют тот же смысл, что и коэффициенты  $A_n$ ,  $C_n$  и  $B_n$ ,  $D_n$  в формулах (1.9).

Пусть приходящая сверху упругая волна задана вектор-функцией

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{B}_s \mathbf{E}_s^-(y) \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x}.$$

Будем искать уходящую вверх волну Флоке в виде векторного ряда

$$\mathbf{u} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_n \mathbf{E}_n^+(y) \mathbf{a}_n e^{iL_n x}.$$

В дальнейшем будет удобно иметь дело не с вектор-функциями  $\mathbf{u}$ , а с более короткими их частями. Чтобы выделить подвекторы из векторов  $\mathbf{u}$ , будем из строк матриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$  составлять подматрицы  $\mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{S}_n$  соответственно. Способы построения таких подматриц зависят от типа граничных условий в задаче дифракции.

Рассмотрим задачу дифракции упругой волны на границе полуплоскости с дефектами со следующими условиями: на  $\mathcal{N}$ , как и раньше, заданы условия (3.1) полного контакта упругого тела с жестким основанием, а на  $\mathcal{M}$  – условия вида

$$\sigma_y^{(0)}(x, 0) + \sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau^{(0)}(x, 0) + \tau(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M} \quad (3.19)$$

(свободная граница).

Предварительно получим решение вспомогательной задачи об отражении упругой волны от границы полуплоскости с условиями полного контакта (без дефектов). Выделим из вектора  $\mathbf{u}$  подвекторы  $(u_x, u_y)$  и  $(\sigma_y, \tau)$ . Пусть матрицы  $\mathbf{P}_n$  и  $\mathbf{R}_n$  – верхние половины матриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$ , а  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{S}_n$  – нижние их половины. Тогда в задаче об отражении волны имеем

$$\mathbf{R}_s \mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{P}_s \mathbf{a}_s = 0, \quad \mathbf{P}_n \mathbf{a}_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq s.$$

Отсюда  $\mathbf{a}_s = -\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{R}_s\mathbf{b}_s^{(0)}$  и  $\mathbf{a}_n = 0$  при  $n \neq s$ .

Пометим верхним индексом (1) решение вспомогательной задачи. Будем искать решение задачи дифракции на системе дефектов в виде суммы  $\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  – возмущение упругого поля от дефектов. На участках границы  $\mathcal{N}$  должно выполняться векторное равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_n \mathbf{a}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (3.20)$$

а на других участках границы – равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_n \mathbf{a}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = (\mathbf{Q}_s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{R}_s - \mathbf{S}_s) \mathbf{b}_s^{(0)} e^{i\frac{2\pi}{l}sx}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (3.21)$$

Чтобы привести векторное ПСФУ к стандартной форме, введем новые искомые векторы  $\mathbf{c}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{a}_n$ . В итоге имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.5.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов с граничными условиями (3.1) и (3.19) сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_n^{-1} \mathbf{c}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (3.22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = (\mathbf{Q}_s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{R}_s - \mathbf{S}_s) \mathbf{b}_s^{(0)} e^{i\frac{2\pi}{l}sx}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (3.23)$$

Вариант задачи дифракции упругой волны на границе полуплоскости с дефектами, на которых заданы условия скольжения без трения по жесткому основанию, также может быть сведен к векторному ПСФУ.

Как и в случае предыдущей задачи, будем искать упругое волновое поле в виде суммы  $\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}^{(1)}$  – решение задачи об отражении волны от границы полуплоскости с условиями полного контакта и  $\mathbf{u}$  – возмущение упругого поля от дефектов. Решение вспомогательной задачи об отражении было получено выше, при этом использовались матрицы  $\mathbf{P}_n$  и  $\mathbf{R}_n$ , составленные из двух верхних строк матриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$ . Чтобы было выполнено условие (3.1), как и раньше, должно выполняться векторное равенство (3.20). Но чтобы выделить из вектора  $\mathbf{u}$  элементы, участвующие в условии (3.2), построим матрицы  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{S}_n$  иначе – из 2-й и 4-й строк матриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$  соответственно. Тогда из условия (3.1) следует, что должно быть выполнено равенство вида (3.21), но с иначе определенными подматрицами матриц  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{B}_n$ .

Легко видеть, что в данном случае первый элемент в равенстве (3.21) справа равен нулю. Следовательно, векторное парное уравнение распадается на две части. Одинаковые строки в (3.20) и (3.21) дают бесконечную систему линейных уравнений, связывающих элементы



векторов  $\mathbf{a}_n$ . Поэтому можно исключить из разных строк этих равенств половину искомых элементов. Тогда для оставшихся элементов будем иметь скалярное ПФУ, точно такое же, что было получено в предыдущем разделе.

### 3.4. Численный эксперимент

Проведен численный эксперимент. В качестве программной среды использована интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов из семейства продуктов MathWorks - MATLAB(Матлаб).

Выбор данного программного обеспечения связан с многофункциональностью и высокой скоростью проведения численных расчетов. MATLAB содержит встроенные функции линейной алгебры, быстрого преобразования Фурье, функции для работы с полиномами и численного решения дифференциальных уравнений [25]. В том числе, имеется возможность использовать современные методы параллельных вычислений для ускорения нахождения решения СЛАУ. К дополнительным преимуществам можно отнести простоту визуализации полученных результатов и возможность построения динамических графиков.

Постоянные Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  связаны с продольной и поперечной скоростями упругой волны формулами (см. [21], с.5)

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Значения скоростей упругой волны вычисляются по формулам

$$v_p = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mathcal{G}}{\rho}},$$

где  $\mathcal{E}$  – модуль Юнга, а  $\mathcal{G}$  – модуль сдвига.

Таким образом постоянные Ламе могут быть вычислены как по известным значениям скоростей распространения упругой волны, так и по значениям  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$  упругой среды.

При расчетах взяты: значения скоростей продольной и поперечной волны для каучука  $v_p = 198$  м/с и  $v_s = 54$  м/с, при плотности среды  $\rho = 0,93$  г/см<sup>3</sup>; значения скоростей продольной и поперечной волны для органического стекла (плексиглас)  $v_p = 2672$  м/с и  $v_s = 1284$  м/с, при плотности среды  $\rho = 1,18$  г/см<sup>3</sup>.

Значения коэффициентов падающей волны  $B_s$  и  $D_s$  могут быть заданы произвольными комплексными числами. Индекс гармоники падающей волны задается в диапазоне параметра усечения СЛАУ  $-N \leq s \leq N$ . Для удобства, выбрано значение  $s = 0$ . Значение параметра  $\alpha$  зависит от угла падения волны  $\theta$ . Если угол падения упругой волны берется от нормали к оси

$Ox$ , то  $\alpha = k_1 \sin(\theta)$ , при  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Когда угол берется от оси  $Ox$ , тогда  $\alpha = k_1 \cos(\theta)$ , при  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Решение системы линейных алгебраических уравнений (3.15) найдено методом Гаусса. Как было отмечено выше, последовательность решений конечных СЛАУ сходится к точному решению БСЛАУ при  $N \leq M$ . Параметры усечения взяты  $N = M$ . Результаты вычислений коэффициентов вектора  $C$  для гармоник дифрагированной волны с индексами  $(s-1)$ ,  $s$ ,  $(s+1)$  при  $N = 1..20$  приведены на рисунках 3.2 – 3.5.

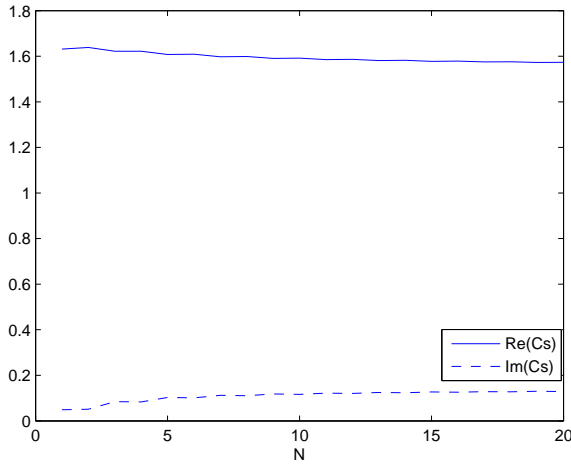


Рис. 3.2.  $C_s$ . Каучук.

$B_s = 1$ ,  $D_s = 1$ ,  $l = 2\pi$ ,  $\mathcal{M} = (0, \pi/2)$ ,  
 $\omega = 150$  рад/с,  $\theta = \pi/4$

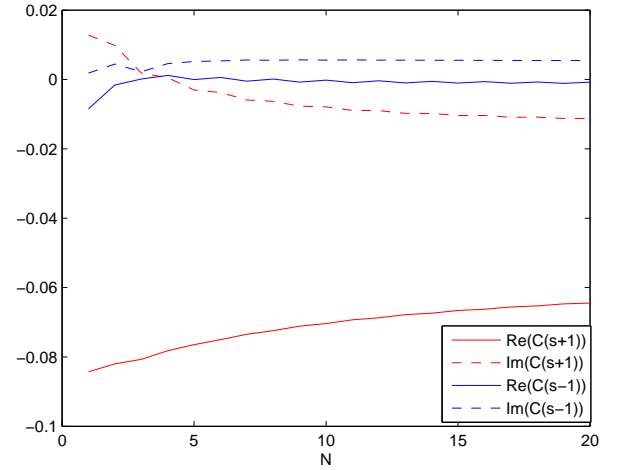


Рис. 3.3.  $C_{(s-1)}$  и  $C_{(s+1)}$ . Каучук.

$B_s = 1$ ,  $D_s = 1$ ,  $l = 2\pi$ ,  $\mathcal{M} = (0, \pi/2)$ ,  
 $\omega = 150$  рад/с,  $\theta = \pi/4$

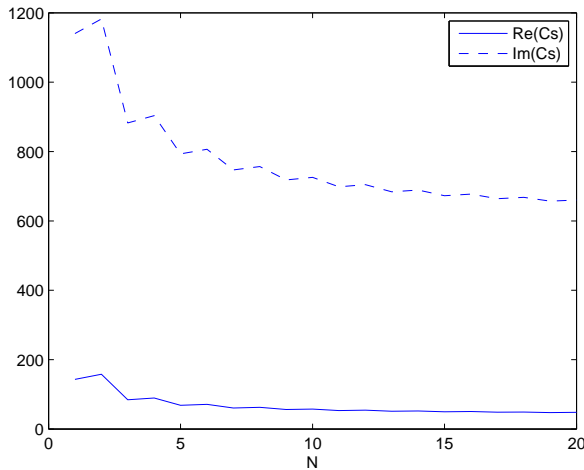


Рис. 3.4.  $C_s$ . Плексиглас.

$B_s = 1$ ,  $D_s = 1$ ,  $l = 2\pi$ ,  $\mathcal{M} = (0, \pi/2)$ ,  
 $\omega = 150$  рад/с,  $\theta = \pi/4$

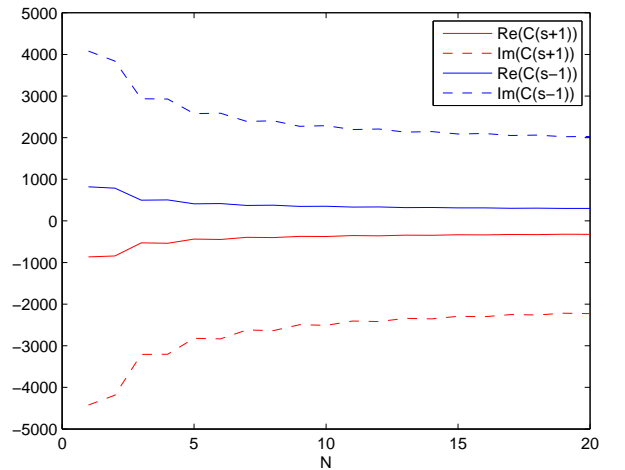


Рис. 3.5.  $C_{(s-1)}$  и  $C_{(s+1)}$ . Плексиглас.

$B_s = 1$ ,  $D_s = 1$ ,  $l = 2\pi$ ,  $\mathcal{M} = (0, \pi/2)$ ,  
 $\omega = 150$  рад/с,  $\theta = \pi/4$

Коэффициенты остальных гармоник на графиках так же сходятся.

Стоит отметить, что скорость сходимости коэффициентов при малых значениях  $N$  зависит от исходных данных. Размер периода  $l$  и длина падающей волны  $\Lambda_p = 2\pi v_p/\omega$ , в общем случае, не зависят друг от друга. С точки зрения практического применения полученных результатов, следует задавать значения этих величин как  $\Lambda_p \leq l$ . На рисунках 3.6 – 3.9 отображены графики значений  $C_s$ ,  $C_{(s-1)}$  и  $C_{(s+1)}$  при  $\Lambda_p < l$ .

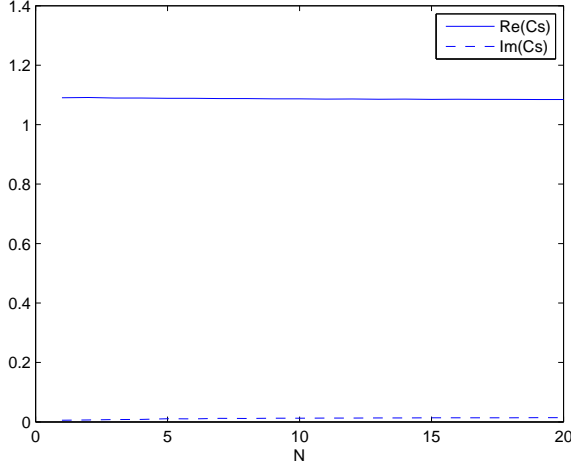


Рис. 3.6.  $C_s$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2), \\ \omega = 220 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

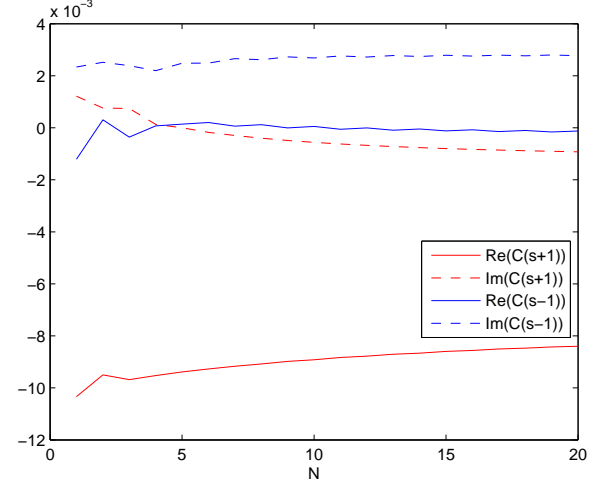


Рис. 3.7.  $C_{(s-1)}$  и  $C_{(s+1)}$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2), \\ \omega = 220 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

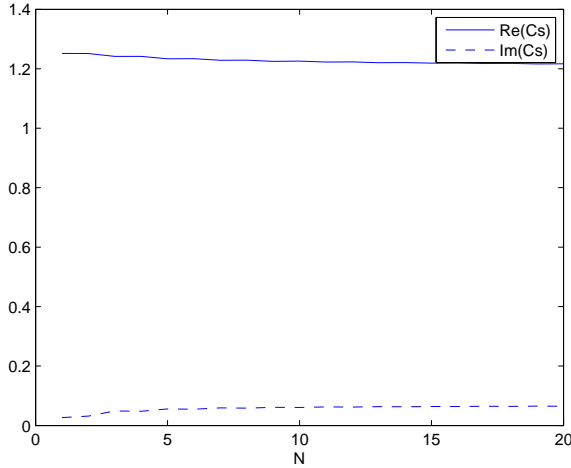


Рис. 3.8.  $C_s$ . Плексиглас.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2), \\ \omega = 2800 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

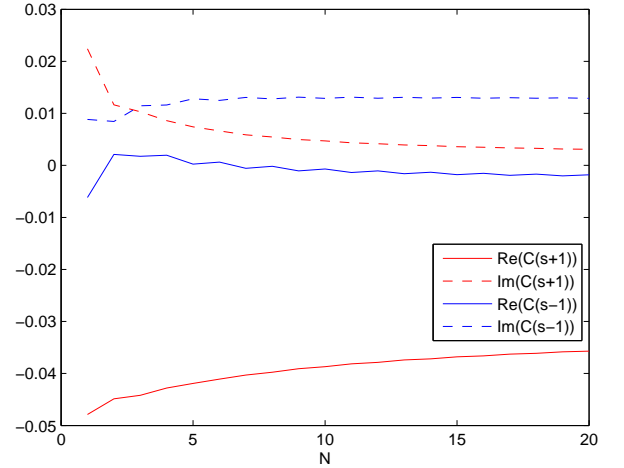
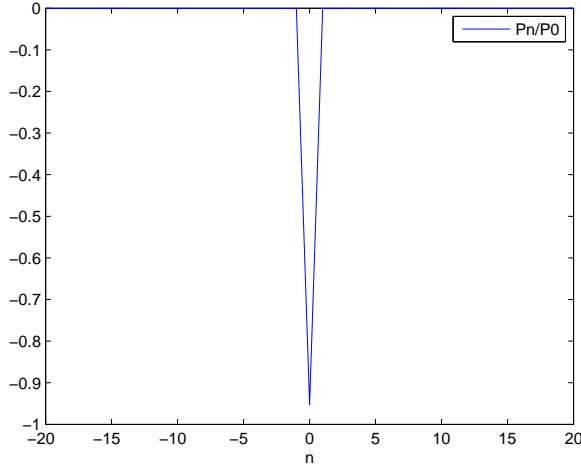


Рис. 3.9.  $C_{(s-1)}$  и  $C_{(s+1)}$ . Плексиглас.

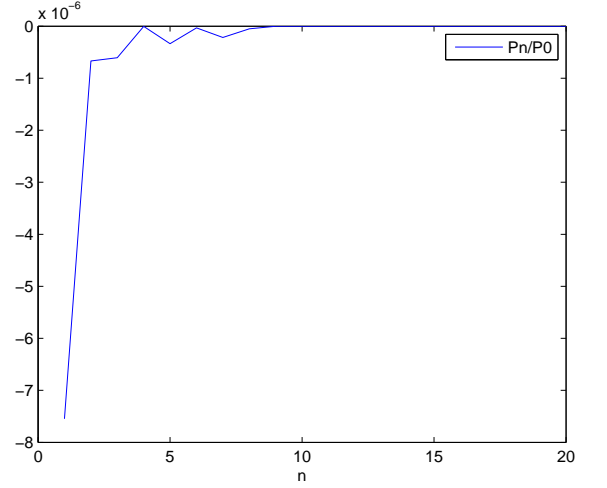
$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2), \\ \omega = 2800 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

Построен график отношений потоков энергии отдельных гармоник  $P_n$  дифрагированной волны к потоку энергии падающей волны  $P^{(0)}$  через период  $l$  на границе  $y = 0$  (см. рис. 3.10). На рис. 3.11 показаны значения только для гармоник с номерами  $n = 1..20$ . Отрицательные значения обусловлены направлением движения падающей волны по отношению к оси  $Oy$ .

Рис. 3.10.  $P_n/P^{(0)}$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2),$$

$$\omega = 600 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

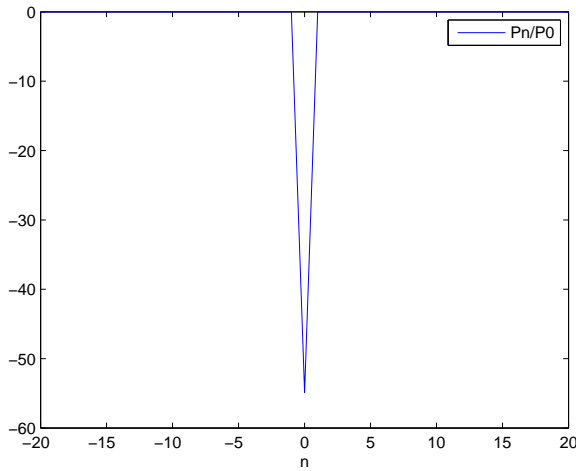
Рис. 3.11.  $P_n/P^{(0)}$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2),$$

$$\omega = 600 \text{ рад/с}, \theta = \pi/4$$

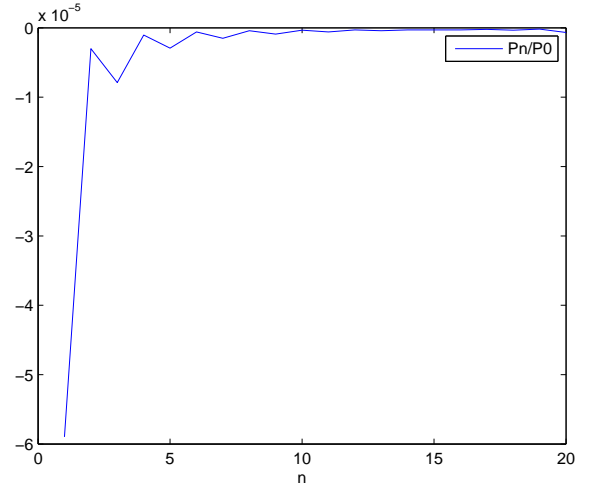
При заданных параметрах значение  $|P_s/P^{(0)}| > 0,95$ .

На рисунках 3.12 и 3.13 показан график  $P_n/P^{(0)}$ , когда угол падения волны по отношению к прямой  $Ox$  близок к нулю, а значение  $l/\Lambda_p > 10$ . В этом случае  $|P_s/P^{(0)}| < 0,55$ .

Рис. 3.12.  $P_n/P^{(0)}$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2),$$

$$\omega = 2000 \text{ рад/с}, \theta = \pi/180$$

Рис. 3.13.  $P_n/P^{(0)}$ . Каучук.

$$B_s = 1, D_s = 1, l = 2\pi, \mathcal{M} = (0, \pi/2),$$

$$\omega = 2000 \text{ рад/с}, \theta = \pi/180$$

Результаты численного эксперимента подтверждают теоретические выводы, сделанные выше. Отметим, что метод Гаусса является вычислительно неустойчивым для плохо обусловленных матриц коэффициентов СЛАУ. Для рассматриваемой задачи плохо обусловленные матрицы возникают в предельных значениях угла падения волны  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  от оси  $Ox$  при больших значениях  $N$ .

## 4. Переопределенные граничные задачи

Если на границе области задать условий больше, чем нужно для выделения единственного решения системы уравнений с частными производными, то задача становится переопределенной. Условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач в ряде случаев удобно использовать при исследовании граничных задач со смешанными граничными условиями.

### 4.1. Условия разрешимости переопределенной задачи

Уточним, какой смысл имеют интегрально-сумматорные тождества вида (3.13).

Рассмотрим следующую переопределенную граничную задачу: найти положительно ориентированное квазипериодическое решение системы уравнений (1.2) в верхней полуплоскости  $y > 0$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$u_x(x, 0) = u_{x0}(x), \quad u_y(x, 0) = 0, \quad \tau(x, 0) = \tau_0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (4.1)$$

Здесь предполагается, что заданные функции  $u_{x0}(x)$  и  $\tau_0(x)$  являются квазипериодическими с одними и теми же параметрами  $\alpha$  и  $l$ .

**Теорема 4.1.** *Переопределенная граничная задача (1.2), (4.1) имеет единственное положительно ориентированное решение тогда и только тогда, когда*

$$\tau_0(x) = i\rho\omega^2 \int_0^l u_{x0}(t) \left( \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\frac{2\pi}{l}m(x-t)} \right) dt, \quad x \in (0, l), \quad (4.2)$$

здесь

$$\gamma_m = \frac{L_m^2}{\beta_{1m}} + \beta_{2m}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

**Доказательство.** Как следует из теоремы 1.1, положительно ориентированное квазипериодическое решение системы уравнений (1.2) в верхней полуплоскости имеет вид (1.9) при  $B_n = 0$ ,  $D_n = 0$ . Условие  $u_y(x, 0) = 0$  будет выполнено, если  $\beta_{1n}A_n - L_nC_n = 0$  при всех  $n$ . Исключим коэффициенты  $A_n$  и получим, что

$$u_x(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n C_n e^{iL_n x}, \quad \tau(x, 0) = i\rho\omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{iL_n x}.$$

Следовательно, эти функции должны быть связаны друг с другом равенством (4.2).

Таким образом, интегрально-сумматорное тождество (3.13) при  $Z_n = \tilde{C}_n$  фактически представляет собой условие разрешимости вспомогательной переопределенной задачи для системы уравнений теории упругости. Отметим, что в работе [48] связь между функциями

$u_{x0}(x)$  и  $\tau_0(x)$  в более общем случае, без предположения о квазипериодичности, была получена на языке их образов Фурье:

$$\tau_0(\xi) = \frac{i\rho\omega^2\beta_1(\xi)}{\xi^2 + \beta_1(\xi)\beta_2(\xi)}u_{x0}(\xi), \quad \text{где} \quad \beta_j(\xi) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Так как для квазипериодической функции вида

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{iL_n x}$$

образ Фурье представляет собой ряд из  $\delta$ -распределений

$$f(\xi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\xi + L_n),$$

то, легко проверить, из (4.3) следует тождество (3.13).

В работе [48] рассматривалась также более общая переопределенная задача для системы уравнений (1.2) в полуплоскости, в которой на границе  $y = 0$  были заданы все четыре функции:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau$ . Доказано, что связи между образами Фурье граничных функций (необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенной задачи) имеют вид

$$\begin{aligned} \xi \tau(\xi) + \beta_1(\xi) \sigma_y(\xi) - 2i\mu\xi\beta_1(\xi) u_x(\xi) - i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2) u_y(\xi) &= 0, \\ -\beta_2(\xi) \tau(\xi) + \xi \sigma_y(\xi) + i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2) u_x(\xi) - 2i\mu\xi\beta_2(\xi) u_y(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.2. Единственность решения задачи дифракции

В работе [77] показано, как с помощью условий разрешимости вспомогательных переопределенных задач можно доказать теоремы единственности в случае задач дифракции электромагнитных волн на плоских тонких проводящих экранах. Аналогичная техника может быть использована и в задачах дифракции упругих волн на периодических системах дефектов.

Пусть упругая полуплоскость находится в полном контакте с жестким основанием вдоль  $\mathcal{N}$ , а на участке границе  $\mathcal{M}$  скользит без трения вдоль основания. В этом случае будем говорить, что дефект представляет собой отслоение упругой полуплоскости от жесткого основания.

**Теорема 4.2.** *Задача дифракции упругой волны на отслоении упругой полуплоскости от жесткого основания может иметь только одно решение.*

Доказательство. Предположим, что задача дифракции имеет два решения. Для их разности должны выполняться граничные условия:  $u_y = 0$  на всей оси  $x$ ,  $\tau = 0$  на  $\mathcal{M}$  и  $u_x = 0$

на  $\mathcal{N}$ . Поэтому на всей оси  $\tau(x) u_x^*(x) = 0$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x) u_x^*(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\xi) u_x^*(\xi) d\xi = 0.$$

Из формулы (4.3) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_1(\xi)}{\xi^2 + \beta_1(\xi)\beta_2(\xi)} |u_x(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Исследуем, какие значения принимает функция

$$f(\xi) = \frac{\beta_1(\xi)}{\xi^2 + \beta_1(\xi)\beta_2(\xi)}.$$

Напомним, что по определению  $\beta_j(\xi) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}$ , при этом  $k_1 < k_2$ . Значения  $\beta_j(\xi)$  или отрицательные, или чисто мнимые с положительной мнимой частью. Точнее,  $\beta_j(\xi) = -\delta_j(\xi)$ , где  $\delta_j(\xi) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2} > 0$ , или  $\beta_j(\xi) = i\delta_j(\xi)$ , где  $\delta_j(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k_j^2} > 0$ .

При  $|\xi| < k_1$

$$f(\xi) = \frac{-\delta_1(\xi)}{\xi^2 + \delta_1(\xi)\delta_2(\xi)}$$

– вещественное отрицательное число.

При  $k_1 < |\xi| < k_2$

$$f(\xi) = \frac{i\delta_1(\xi)}{\xi^2 - i\delta_1(\xi)\delta_2(\xi)} = \frac{i\xi^2\delta_1(\xi) - (\xi^2 - k_1^2)\delta_2(\xi)}{\xi^4 + (\xi^2 - k_1^2)(k_2^2 - \xi^2)}$$

– комплексное число с отрицательной вещественной частью и с положительной мнимой частью.

При  $|\xi| > k_2$

$$f(\xi) = \frac{i\delta_1(\xi)}{\xi^2 - \delta_1(\xi)\delta_2(\xi)}.$$

Так как здесь  $\delta_j(\xi) < |\xi|$ , то  $f(\xi)$  – чисто мнимое число с положительной мнимой частью.

Таким образом, для всех  $\xi$  вещественная и мнимая части  $f(\xi)$  не меняют знак. Поэтому  $u_x(\xi) = 0$ . Из формулы (4.3) следует, что  $\tau(x) = 0$ . Тогда решение системы уравнений (1.2) (разность двух решений задачи дифракции) тождественно равно нулю.

### 4.3. О квазипериодических решениях интегральных уравнений и граничных задач

Как и в случае задач дифракции электромагнитных волн на периодических системах неоднородностей, можно доказать, что решения задач дифракции упругих волн на периодических системах дефектов могут быть только квазипериодическими функциями.

Приведем вместе с простыми доказательствами два вспомогательных утверждения из работы Н.Б. Плещинского [77].

Пусть  $\mathcal{M}$  –  $l$ -периодическая система промежутков на вещественной оси.

**Лемма 4.1.** Пусть  $g(x)$  –  $l$ -периодическая функция. Если интегральное уравнение с разностным ядром

$$\int_{\mathcal{M}} v(t) L(t-x) dt = g(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

имеет только одно решение, то это решение –  $l$ -периодическая функция.

Доказательство. Подставим в левую часть уравнения  $v(t+l)$  вместо  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} v(t+l) L(t-x) dt &= \int_{\mathcal{M}} v(t+l) L(t+l-x-l) dt = \\ &= \int_{\mathcal{M}} v(t_1) L(t_1-x-l) dt_1 = g(x+l) = g(x), \quad x \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Так как решение может быть только одно, то  $v(t+l) = v(t)$ .

**Лемма 4.2.** Пусть  $f(x)$  – квазипериодическая функция. Если интегральное уравнение с разностным ядром

$$\int_{\mathcal{M}} u(t) K(t-x) dt = f(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

имеет только одно решение, то это решение – квазипериодическая функция.

Доказательство. Пусть  $f(x) = e^{i\alpha x} g(x)$  и  $u(x) = e^{i\alpha x} v(x)$ . По предположению уравнение

$$\int_{\mathcal{M}} e^{i\alpha t} v(t) K(t-x) dt = e^{i\alpha x} g(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

имеет только одно решение. Следовательно, уравнение

$$\int_{\mathcal{M}} v(t) L(t-x) dt = g(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

где  $L(t) = e^{i\alpha t} K(t)$ , также имеет только одно решение. По лемме 4.1  $v(t)$  – периодическая функция.

Отсюда непосредственно следует

**Теорема 4.3.** Решение граничной задачи для системы уравнений (1.2) с заданными условиями на границе (задачи дифракции упругой квазипериодической волны на периодической системе неоднородностей на границе полуплоскости) может быть только квазипериодической функцией.



Действительно, периодические задачи дифракции упругих волн, как было показано выше, сводятся к интегральным уравнениям 1-го рода с разностными ядрами. Если на неоднородности набегают квазипериодическая волна, то в правых частях уравнений стоят квазипериодические функции.

## Глава 2. Двумерные задачи сопряжения в слоистых областях

Во второй главе диссертации рассмотрены двумерные задачи сопряжения для системы уравнений теории упругости в слоистой области. Дана постановка общей задачи сопряжения для многослойной упругой среды с периодической системой дефектов на границе раздела двух сред. Показано, как задачи сопряжения двух полуплоскостей сводятся к парным сумматорным функциональным уравнениям одного и того же вида в скалярной или в векторной форме. Исследован случай, когда систем дефектов на границах сопряжения упругих сред две и более. Предложены простые правила, позволяющие перейти от общей задачи сопряжения в слоистой области к парному сумматорному функциональному уравнению в стандартной форме.

### 5. Постановки задач сопряжения

Пусть прямые  $y = h_j$ ,  $j = 1 \dots k$ ,  $h_1 > h_2 > \dots > h_k$ , разделяют плоскость  $(x, y)$  на области: полуплоскости  $\Omega_1 : y > h_1$ ,  $\Omega_{k+1} : y < h_k$  и полосы  $\Omega_j : h_j < y < h_{j-1}$ ,  $j = 2 \dots k$  (рис. 5.1). Для всех рассматриваемых задач будем отмечать верхним индексом номер упругой волны, а номер слоя будем отмечать нижним индексом. Если нижних индексов несколько, то номер слоя – это первый индекс в последовательности.

Общая задача сопряжения для слоистой плоскости ставится следующим образом. В каждом слое  $\Omega_j$ ,  $j = 1 \dots k + 1$ , нужно найти решение  $u_x^{(j)}, u_y^{(j)}, \sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \tau^{(j)}$  системы уравнений (1.2) при значениях параметров  $\lambda = \lambda_j$ ,  $\mu = \mu_j$ ,  $\rho = \rho_j$ . Искомые функции должны быть дифференцируемы в области  $\Omega_j$  и непрерывно продолжимы на ее границу всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, где допускаются интегрируемые особенности. Кроме того, в полуплоскостях  $\Omega_1$  и  $\Omega_{k+1}$  должны быть выполнены условия излучения: решения системы уравнений (1.2) нужно искать в классе уходящих на бесконечность квазипериодических решений. Следы искомых функций на прямых  $y = h_j$ ,  $j = 1 \dots k$ , должны удовлетворять условиям сопряжения.

Условия сопряжения могут быть заданы различными способами (см., например, [4], глава 1). Для периодических задач теории упругости в общем случае на каждой прямой  $y = h_j$  нужно задать четыре независимых равенства, связывающих следы функций  $u_x^{(j)}, u_y^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \tau^{(j)}$  и  $u_x^{(j+1)}, u_y^{(j+1)}, \sigma_y^{(j+1)}, \tau^{(j+1)}$ . Если решения системы уравнений (1.2) интерпретировать как

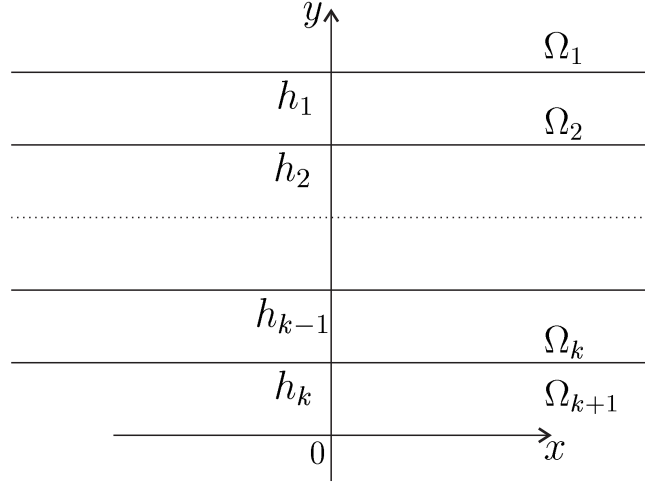


Рис. 5.1. Плоскостойкая упругая среда

упругие гармонические волны, то можно выделить несколько основных вариантов взаимодействия упругих слоев. При полном контакте упругих сред вдоль прямой  $y = h_j$  следы искомых функций должны быть непрерывны:

$$\begin{aligned} u_x^{(j)}(x, h_j) &= u_x^{(j+1)}(x, h_j), & u_y^{(j)}(x, h_j) &= u_y^{(j+1)}(x, h_j), \\ \sigma_y^{(j)}(x, h_j) &= \sigma_y^{(j+1)}(x, h_j), & \tau^{(j)}(x, h_j) &= \tau^{(j+1)}(x, h_j). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если слои скользят относительно друг друга без трения и без отслоения, то

$$\begin{aligned} u_y^{(j)}(x, h_j) &= u_y^{(j+1)}(x, h_j), & \tau^{(j)}(x, h_j) &= 0, \\ \sigma_y^{(j)}(x, h_j) &= \sigma_y^{(j+1)}(x, h_j), & \tau^{(j+1)}(x, h_j) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

(здесь два условия представляют собой граничные условия).

Условия (5.1) и (5.2) являются условиями сопряжения с постоянными коэффициентами. Если же вдоль прямой  $y = h_j$  имеются дефекты, то коэффициенты в условиях сопряжения становятся разрывными. Пусть прямая  $y = h_j$  разделена на две части:  $\mathcal{M}_j$  и  $\mathcal{N}_j$ . Потребуем, например, чтобы на  $\mathcal{N}_j$  выполнялись условия (5.1), а на  $\mathcal{M}_j$  — условия (5.2). В этом случае имеем упругую среду, составленную из склеенных друг с другом упругих слоев (композит), но с дефектами — вдоль  $\mathcal{M}_j$  склейка нарушена (см. рис. 5.2).

В качестве системы дефектов  $\mathcal{M}_j$  можно рассматривать бесконечно тонкие жесткие пластины (экраны). В этом случае на  $\mathcal{M}_j$  также могут быть заданы различные условия: или

$$\begin{aligned} u_x^{(j)}(x, h_j) &= 0, & u_x^{(j+1)}(x, h_j) &= 0, \\ u_y^{(j)}(x, h_j) &= 0, & u_y^{(j+1)}(x, h_j) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

(жесткий контакт с экраном), или

$$\begin{aligned} u_y^{(j)}(x, h_j) &= 0, & u_y^{(j+1)}(x, h_j) &= 0, \\ \tau^{(j)}(x, h_j) &= 0, & \tau^{(j+1)}(x, h_j) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

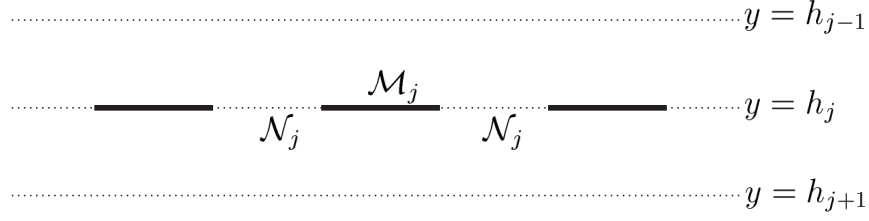


Рис. 5.2. Композит с дефектами

(скольжение вдоль экрана без трения), а также условия, моделирующие сухое или вязкое трение, или какие-либо иные условия.

В задачах о собственных колебаниях слоистой плоскости нужно искать ненулевые решения системы уравнений (1.2) с однородными граничными условиями. В задачах дифракции упругих волн в слоистых средах в условиях сопряжения присутствуют также следы функций, определяющих упругую волну, пришедшую от внешнего источника.

## 6. Задачи сопряжения двух упругих полуплоскостей

Исследуем случай, когда плоскость  $(x, y)$  разделена только на две области: верхнюю ( $y > 0$ ) полуплоскость  $\Omega_1$  и нижнюю ( $y < 0$ ) полуплоскость  $\Omega_2$ . Пусть свойства сред в верхней полуплоскости и нижней полуплоскости определены параметрами  $\rho_1, \mu_1, \lambda_1$  и  $\rho_2, \mu_2, \lambda_2$  соответственно. Будем считать, что в верхней полуплоскости расположен источник, от которого на границу сопряжения набегают отрицательно ориентированная упругая волна  $u_x^{(0)}$ ,  $u_y^{(0)}$ ,  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau^{(0)}$ , а на самой границе расположена периодическая система дефектов. Требуется найти квазипериодические решения системы (1.2) в каждой области с учетом условий на бесконечности.

Пусть, как и раньше, падающая волна представляет собой только одну гармонику Флоке с номером  $s$ , а зависимость искомых функций от времени определяется множителем  $\exp(i\omega t)$ :

$$\begin{aligned}
 u_x^{(0)}(x, y) &= \left[ -B_s^{(0)} L_s e^{-i\beta_{1,1s}y} + D_s^{(0)} \beta_{1,2s} e^{-i\beta_{1,2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\
 u_y^{(0)}(x, y) &= \left[ B_s^{(0)} \beta_{1,1s} e^{-i\beta_{1,1s}y} + D_s^{(0)} L_s e^{-i\beta_{1,2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\
 \sigma_x^{(0)}(x, y) &= i \left[ -B_s^{(0)} \left( \lambda_1 (k_{1,1})^2 + 2\mu_1 L_s^2 \right) e^{-i\beta_{1,1s}y} + 2D_s^{(0)} \mu_1 L_s \beta_{1,2s} e^{-i\beta_{1,2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\
 \sigma_y^{(0)}(x, y) &= i \left[ -B_s^{(0)} \left( \rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_s^2 \right) e^{-i\beta_{1,1s}y} - 2D_s^{(0)} \mu_1 L_s \beta_{1,2s} e^{-i\beta_{1,2s}y} \right] e^{iL_s x}, \\
 \tau^{(0)}(x, y) &= i \left[ 2B_s^{(0)} \mu_1 L_s \beta_{1,1s} e^{-i\beta_{1,1s}y} - D_s^{(0)} \left( \rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_s^2 \right) e^{-i\beta_{1,2s}y} \right] e^{iL_s x}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

В верхней полуплоскости упругую волну положительной ориентации  $u_x^{(1)}$ ,  $u_y^{(1)}$ ,  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$ ,  $\tau^{(1)}$

будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_x^{(1)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(1)} L_n e^{i\beta_{1,1n}y} + C_n^{(1)} \beta_{1,2n} e^{i\beta_{1,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
u_y^{(1)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(1)} \beta_{1,1n} e^{i\beta_{1,1n}y} - C_n^{(1)} L_n e^{i\beta_{1,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_x^{(1)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(1)} (\lambda_1 (k_{1,1}^{(1)})^2 + 2\mu_1 L_n^2) e^{i\beta_{1,1n}y} + 2C_n^{(1)} \mu_1 L_n \beta_{1,2n} e^{i\beta_{1,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_y^{(1)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(1)} (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2) e^{i\beta_{1,1n}y} - 2C_n^{(1)} \mu_1 L_n \beta_{1,2n} e^{i\beta_{1,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\tau^{(1)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2A_n^{(1)} \mu_1 \beta_{1,1n} L_n e^{i\beta_{1,1n}y} + C_n^{(1)} (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2) e^{i\beta_{1,2n}y} \right] e^{iL_n x},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

а в нижней полуплоскости упругую волну отрицательной ориентации  $u_x^{(2)}$ ,  $u_y^{(2)}$ ,  $\sigma_x^{(2)}$ ,  $\sigma_y^{(2)}$ ,  $\tau^{(2)}$  будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_x^{(2)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ -B_n^{(2)} L_n e^{-i\beta_{2,1n}y} + D_n^{(2)} \beta_{2,2n} e^{-i\beta_{2,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
u_y^{(2)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ B_n^{(2)} \beta_{2,1n} e^{-i\beta_{2,1n}y} + D_n^{(2)} L_n e^{-i\beta_{2,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_x^{(2)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ -B_n^{(2)} (\lambda_1 (k_{2,1}^{(2)})^2 + 2\mu_2 L_n^2) e^{-i\beta_{2,1n}y} + 2D_n^{(2)} \mu_2 L_n \beta_{2,2n} e^{-i\beta_{2,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_y^{(2)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ -B_n^{(2)} (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2) e^{-i\beta_{2,1n}y} - 2D_n^{(2)} \mu_2 L_n \beta_{2,2n} e^{-i\beta_{2,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\tau^{(2)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2B_n^{(2)} \mu_2 \beta_{2,1n} L_n e^{-i\beta_{2,1n}y} - D_n^{(2)} (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2) e^{-i\beta_{2,2n}y} \right] e^{iL_n x}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Здесь значения  $L_n$ ,  $\beta_{j,1n}$ ,  $\beta_{j,2n}$  определены точно так же, как и в первой главе.

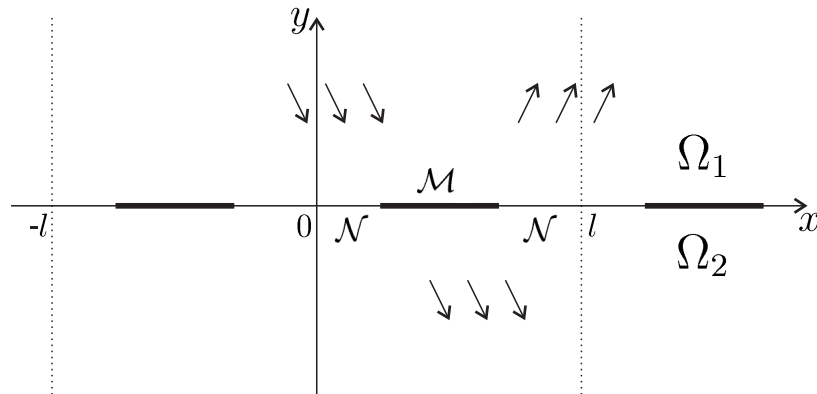


Рис. 6.1. Задача сопряжения двух полуплоскостей

Участки с дефектом и без дефекта (на прямой  $y = 0$ ) обозначим просто  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ , а у искоемых коэффициентов для волн с верхними индексами (1) и (2) не будем указывать номер волны:  $A_n$ ,  $C_n$  и  $B_n$ ,  $D_n$ . Такие обозначения будем использовать для всех задач сопряжения двух полуплоскостей, которые будут рассмотрены ниже (см. рис. 6.1).

### 6.1. Скалярная форма решения

Зададим условия сопряжения на границе раздела сред. Пусть на  $\mathcal{N}$  следы искоемых функций удовлетворяют условиям (5.1), а на  $\mathcal{M}$  – условиям (5.2). Запишем эти условия так:

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, 0) + u_x^{(1)}(x, 0) &= u_x^{(2)}(x, 0), & u_y^{(0)}(x, 0) + u_y^{(1)}(x, 0) &= u_y^{(2)}(x, 0), \\ \sigma_y^{(0)}(x, 0) + \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0), & \tau^{(0)}(x, 0) + \tau^{(1)}(x, 0) &= \tau^{(2)}(x, 0), \end{aligned} \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} u_y^{(0)}(x, 0) + u_y^{(1)}(x, 0) &= u_y^{(2)}(x, 0), & \tau^{(0)}(x, 0) + \tau^{(1)}(x, 0) &= 0, \\ \sigma_y^{(0)}(x, 0) + \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0), & \tau^{(2)}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.5)$$

Условимся считать, что слоистая среда – это две склеенные полуплоскости, а вдоль  $\mathcal{M}$  склейка нарушена.

**Теорема 6.1.** *Задача сопряжения двух смежных полуплоскостей с условиями сопряжения (6.4), (6.5) сводится к парному сумматорному функциональному уравнению вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n D_n e^{i \frac{2\pi}{l} n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i \frac{2\pi}{l} n x} = E_s^{(0)} e^{i \frac{2\pi}{l} s x}, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (6.7)$$

где  $E_s^{(0)}$ ,  $\gamma_n$  – известные величины.

Доказательство. Разделим задачу сопряжения на две подзадачи и будем искать ее решение в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое – решение вспомогательной задачи сопряжения полуплоскостей с условиями полного контакта, второе – возмущение упругой среды, вызванное дефектами. Несложно показать, что решение вспомогательной задачи  $\underline{u_x^{(1)}}$ ,  $\underline{u_y^{(1)}}$ ,  $\underline{\sigma_y^{(1)}}$ ,  $\underline{\tau^{(1)}}$ ,  $\underline{u_x^{(2)}}$ ,  $\underline{u_y^{(2)}}$ ,  $\underline{\sigma_y^{(2)}}$ ,  $\underline{\tau^{(2)}}$  существует и единственно. При этом

$$A_n = 0, \quad C_n = 0, \quad B_n = 0, \quad D_n = 0, \quad n \neq s.$$

При  $n = s$  значения коэффициентов

$$A_s = \tilde{A}_s, \quad C_s = \tilde{C}_s, \quad B_s = \tilde{B}_s, \quad D_s = \tilde{D}_s$$

получены из системы уравнений

$$\begin{aligned} (-B_s^{(0)} + A_s) L_s + (D_s^{(0)} + C_s) \beta_{1,2s} &= -B_s L_s + D_s \beta_{2,2s}, \\ (B_s^{(0)} + A_s) \beta_{1,1s} + (D_s^{(0)} - C_s) L_s &= B_s \beta_{2,1s} + D_s L_s, \\ (-B_s^{(0)} + A_s) (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_s^2) - 2(D_s^{(0)} + C_s) \mu_1 L_s \beta_{1,2s} &= -B_s (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_s^2) - 2D_s \mu_2 L_s \beta_{2,2s}, \\ 2(B_s^{(0)} + A_s) \mu_1 L_s \beta_{1,1s} - (D_s^{(0)} - C_s) (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_s^2) &= 2B_s \mu_2 \beta_{2,1s} L_s - D_s (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_s^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим вторую подзадачу – задачу о возмущении упругой среды от дефектов. Из всех условий, заданных при  $y = 0$ , выберем те, которые должны выполняться на  $\mathcal{M}$ , но не на  $\mathcal{N}$ . Таких условий два:

$$\tau^{(0)} + [\tau^{(1)} + \tau^{(1)}] = 0, \quad \tau^{(2)} + \tau^{(2)} = 0, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Возьмем одно из них, например, второе условие. Получим уравнение вида

$$i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2B_n \mu_2 \beta_{2,1n} L_n - D_n (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2) \right] e^{iL_n x} = -\tau^{(2)}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.8)$$

С другой стороны, равенство  $u_x^{(1)} = u_x^{(2)}$  должно выполняться только на  $\mathcal{N}$ . Следовательно, но,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n L_n + C_n \beta_{1,2n} + B_n L_n - D_n \beta_{2,2n}] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.9)$$

Преобразуем уравнения (6.8), (6.9). Рассмотрим условия задачи сопряжения, которые должны быть выполнены и на  $\mathcal{M}$ , и на  $\mathcal{N}$ :

$$u_y^{(1)}(x, 0) = u_y^{(2)}(x, 0), \quad \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau^{(1)}(x, 0) = \tau^{(2)}(x, 0).$$

Эти равенства определяют при каждом  $n$  связи между искомыми коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_n \beta_{1,1n} - C_n L_n &= B_n \beta_{2,1n} + D_n L_n, \\ A_n (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2) - 2C_n \mu_1 L_n \beta_{1,2n} &= -B_n (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2) - 2D_n \mu_2 L_n \beta_{2,2n}, \\ 2A_n \mu_1 \beta_{1,1n} L_n + C_n (\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2) &= 2B_n \mu_2 \beta_{2,1n} L_n - D_n (\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2). \end{aligned}$$

Выразим  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  через  $D_n$  и подставим найденные выражения в (6.8), (6.9). Преобразуем эти равенства аналогично тому, как это было сделано в случае ПСФУ (3.8), (3.9). Получим парное сумматорное функциональное уравнение в стандартной форме (6.6), (6.7). В дальнейшем будем стараться приводить любую задачу сопряжения к ПСФУ именно такого вида.

Парное уравнение (6.6), (6.7) имеет тот же вид, что и ПСФУ задачи дифракции упругой волны на дефектах, расположенных на границе полуплоскости (глава 1). Поэтому справедлива

**Теорема 6.2.** *Задача сопряжения двух смежных полуплоскостей с условиями сопряжения (6.4), (6.5) сводится к интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{N}} v(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{iLn(x-t)} dt = -\frac{1}{l} E_s^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n I_{s-n} e^{iLn x} \quad x \in \mathcal{N},$$

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{M}} w(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{iLn(x-t)} dt = E_s^{(0)} e^{iLs x}, \quad x \in \mathcal{M},$$

и к БСЛАУ

$$lD_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n D_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = E_s^{(0)} I_{s-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Методика перехода от ПСФУ к интегральным уравнениям и БСЛАУ точно такая же, как при исследовании задачи дифракции упругой волны на дефектах на границе полуплоскости.

В данном случае

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{iLn x} \quad \text{и} \quad w(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n D_n e^{iLn x}.$$

## 6.2. Векторная форма решения

Рассмотрим эту же задачу сопряжения двух полуплоскостей, но используем векторную форму представления искомых функций (напряжений и перемещений).

Пусть приходящая сверху волна задана вектор-функцией

$$u^{(0)}(x, y) = \mathbf{B}_{1,s} \mathbf{E}_{1,s}^-(y) \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iLs x}.$$

Будем искать уходящую вверх волну в виде

$$u^{(1)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{1,n} \mathbf{E}_{1,n}^+(y) \mathbf{a}_n e^{iLn x},$$

а упругую волну в нижнем полупространстве – в виде

$$u^{(2)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(y) \mathbf{b}_n e^{iLn x}.$$

Здесь искомые векторы  $\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{b}_n$  составлены из коэффициентов  $A_n$ ,  $C_n$  и  $B_n$ ,  $D_n$ , а заданные вектор  $\mathbf{b}_s^{(0)} = (B_s^{(0)}, D_s^{(0)})$ . Матрицы  $\mathbf{A}_{j,n}$  и  $\mathbf{B}_{j,n}$  составлены из столбцов собственных векторов матрицы системы (1.2) для каждого слоя  $j = 1, 2$ , а именно

$$\mathbf{A}_{j,n} = \begin{pmatrix} L_n & \beta_{j,2n} \\ \beta_{j,1n} & -L_n \\ i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) & -2i\mu_j \beta_{j,2n} L_n \\ 2i\mu_j \beta_{j,1n} L_n & i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$



$$\mathbf{B}_{j,n} = \begin{pmatrix} -L_n & \beta_{j,2n} \\ \beta_{j,1n} & L_n \\ -i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) & -2i\mu_j \beta_{j,2n} L_n \\ 2i\mu_j \beta_{j,1n} L_n & -i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Для каждого слоя  $j$

$$\mathbf{E}_{j,n}^+(y) = \begin{pmatrix} e^{i\beta_{j,1n}y} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_{j,2n}y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{j,n}^-(y) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_{j,1n}y} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_{j,2n}y} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Как и в скалярном случае, разделим задачу сопряжения на две подзадачи. Из условий сопряжения (6.4) следует, что первая подзадача сводится к уравнению

$$\mathbf{B}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{1,n} \mathbf{a}_n e^{iL_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{2,n} \mathbf{b}_n e^{iL_n x}. \quad (6.13)$$

Для того, чтобы решить уравнение (6.13) в векторном виде, введем новые матрицы

$$\mathbf{P}_{j,n} = \begin{pmatrix} L_n & \beta_{j,2n} \\ \beta_{j,1n} & -L_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{j,n} = \begin{pmatrix} i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) & -2i\mu_j \beta_{j,2n} L_n \\ 2i\mu_j \beta_{j,1n} L_n & i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{R}_{j,n} = \begin{pmatrix} -L_n & \beta_{j,2n} \\ \beta_{j,1n} & L_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{j,n} = \begin{pmatrix} -i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) & -2i\mu_j \beta_{j,2n} L_n \\ 2i\mu_j \beta_{j,1n} L_n & -i(\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

при  $j = 1, 2$ . Перепишем уравнение (6.13) так:

$$\mathbf{R}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n e^{iL_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n e^{iL_n x}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{S}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n e^{iL_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n e^{iL_n x}. \quad (6.17)$$

У пары уравнений (6.16), (6.17) существует единственное решение

$$\mathbf{a}_n = 0, \quad \mathbf{b}_n = 0, \quad n \neq s,$$

$$\mathbf{a}_s = \left( \mathbf{Q}_{1,s} - \mathbf{S}_{2,s} \mathbf{R}_{2,s}^{-1} \mathbf{P}_{1,s} \right)^{-1} (\mathbf{S}_{2,s} - \mathbf{S}_{1,s}) \mathbf{b}_s^{(0)},$$

$$\mathbf{b}_s = [\mathbf{S}_{2,s}^{-1} \mathbf{S}_{1,s} + \mathbf{S}_{2,s}^{-1} \mathbf{Q}_{1,s} \left( \mathbf{Q}_{1,s} - \mathbf{S}_{2,s} \mathbf{R}_{2,s}^{-1} \mathbf{P}_{1,s} \right)^{-1} (\mathbf{S}_{2,s} - \mathbf{S}_{1,s})] \mathbf{b}_s^{(0)}.$$

Пометим, как и в скалярном случае, решение первой вспомогательной подзадачи чертой снизу:

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = (\underline{u_x^{(1)}}, \underline{u_y^{(1)}}), \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = (\underline{u_x^{(2)}}, \underline{u_y^{(2)}}). \quad (6.18)$$

Для того, чтобы исследовать вторую подзадачу – задачу нахождения возмущения упругого поля от дефектов – введем новые матрицы размером  $2 \times 1$  (фактически это векторы), составленные из четвертых строк матриц  $\mathbf{A}_{1,n}$  и  $\mathbf{B}_{2,n}$ :

$$\mathbf{C}_{1,n} = (2i\mu_1 \beta_{1,1n} L_n, \quad i(\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2)), \quad \mathbf{D}_{2,n} = (2i\mu_2 \beta_{2,1n} L_n, \quad -i(\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2)).$$

Тогда при  $x \in \mathcal{M}$

$$\tau^{(1)}(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_{1,n} \mathbf{a}_n e^{iL_n x}, \quad \tau^{(2)}(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}_{1,n} \mathbf{b}_n e^{iL_n x},$$

а так как  $\tau^{(1)}(x, 0) = \tau^{(2)}(x, 0)$  всюду, то  $\mathbf{C}_{1,n} \mathbf{a}_n = \mathbf{D}_{1,n} \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n$ , где  $\mathbf{c}_n$  – новый неизвестный вектор, а точнее – скаляр. Из условий исходной задачи возьмем одно, которое должно быть выполнено только на  $\mathcal{M}$ , а именно условие  $\underline{\tau^{(2)}} + \tau^{(2)} = 0$ . Тогда будем иметь векторное уравнение вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = -\underline{\tau^{(2)}}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.19)$$

Построим еще две матрицы, составленные из первых строк матриц  $\mathbf{A}_{1,n}$  и  $\mathbf{B}_{2,n}$ :

$$\mathbf{E}_{1,n} = (L_n, \quad \beta_{1,2n}), \quad \mathbf{F}_{2,n} = (-L_n, \quad \beta_{2,2n}).$$

Из условия сопряжения  $\underline{u_x^{(1)}} = \underline{u_x^{(2)}}$ , которое должно быть выполнено только на  $\mathcal{N}$ , для второй подзадачи получим еще одно векторное уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{E}_{1,n} \mathbf{a}_n - \mathbf{F}_{2,n} \mathbf{b}_n] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.20)$$

Преобразуем уравнения (6.19), (6.20). Введем две матрицы размером  $2 \times 2$ , составленные из второй и третьей строк матриц  $\mathbf{A}_{1,n}$  и  $\mathbf{B}_{2,n}$ :

$$\mathbf{G}_{1,n} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1n} & -L_n \\ i(\rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2) & -2i\mu_1 \beta_{1,2n} L_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{2,n} = \begin{pmatrix} \beta_{2,1n} & L_n \\ -i(\rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2) & -2i\mu_2 \beta_{2,2n} L_n \end{pmatrix}.$$

Так как функции  $u_y$  и  $\sigma_y$  должны быть непрерывны и на  $\mathcal{M}$ , и на  $\mathcal{N}$ , то должно выполняться равенство  $\mathbf{G}_{1,n} \mathbf{a}_n - \mathbf{H}_{2,n} \mathbf{b}_n = 0$  для всех  $n$ . Пришли к системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1,n} \mathbf{a}_n - \mathbf{H}_{2,n} \mathbf{b}_n &= 0, \\ \mathbf{C}_{1,n} \mathbf{a}_n &= \mathbf{c}_n, \\ \mathbf{D}_{1,n} \mathbf{b}_n &= \mathbf{c}_n. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Пусть  $\tilde{\mathbf{a}}_n$  и  $\tilde{\mathbf{b}}_n$  – решение системы (6.21) при  $\mathbf{c}_n = 1$ . Тогда уравнение (6.20) можно записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{E}_{1,n} \tilde{\mathbf{a}}_n - \mathbf{F}_{2,n} \tilde{\mathbf{b}}_n] \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.22)$$

Получили следующее утверждение.

**Теорема 6.3.** *Задача сопряжения двух смежных полуплоскостей с условиями сопряжения (6.4), (6.5) сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению (6.19), (6.22).*

Отметим, что для задачи сопряжения с условиями (6.4), (6.5) векторная форма записи искомых решений и, следовательно, парного функционального уравнения не дает существенных преимуществ по сравнению со скалярной формой. Но в случае других условий сопряжения переход к векторным представлениям оправдан.

Рассмотрим другую задачу сопряжения. Пусть, как и в предыдущем случае, плоскость  $(x, y)$  разделена на верхнюю полуплоскость  $\Omega_1$  и нижнюю полуплоскость  $\Omega_2$ . Свойства сред в верхней полуплоскости и нижней полуплоскости определены параметрами  $\rho_1, \mu_1, \lambda_1$  и  $\rho_2, \mu_2, \lambda_2$ . В верхней полуплоскости расположен источник, а на границе сопряжения сред расположена периодическая система дефектов (см. рис. 6.1). Потребуем, чтобы на  $\mathcal{N}$  были выполнены условия

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, 0) + u_x^{(1)}(x, 0) &= 0, & u_x^{(2)}(x, 0) &= 0, \\ u_y^{(0)}(x, 0) + u_y^{(1)}(x, 0) &= 0, & u_y^{(2)}(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad x \in \mathcal{N} \quad (6.23)$$

(жесткий контакт с экраном), а на  $\mathcal{M}$  – условия (6.4).

С помощью матриц  $\mathbf{R}_{j,n}, \mathbf{P}_{j,n}, \mathbf{Q}_{j,n}, \mathbf{S}_{j,n}$  запишем условия (6.23) следующим образом:

$$\mathbf{R}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.24)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.25)$$

Условия на  $\mathcal{M}$  в векторной форме имеют вид (6.16), (6.17).

Решение первой подзадачи уже найдено – это (6.18). Заметим, что сейчас условия сопряжения этой вспомогательной задачи совпадают с условиями, которые должны быть выполнены на  $\mathcal{M}$  в исходной задаче. Вообще говоря, всегда имеется возможность выбора условий во вспомогательной задаче об отражении и преломлении упругой волны на границе раздела сред без дефектов. Можно брать как условия, которые должны быть выполнены на  $\mathcal{N}$  в постановке исходной задачи, так и те условия, которые должны быть выполнены на  $\mathcal{M}$ .

Перейдем ко второй подзадаче. Введем векторы  $\mathbf{u}^{(j)} = (u_x^{(j)}, u_y^{(j)})$  и  $\mathbf{v}^{(j)} = (\sigma_y^{(j)}, \tau^{(j)})$ . Из условий (6.16) и (6.17) на  $\mathcal{M}$  и условий (6.24), (6.25) на  $\mathcal{N}$  следует, что равенство  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$  должно быть выполнено всюду. Тогда  $\mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n = \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n$ . Получили, что первая часть ПСФУ имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = -\mathbf{u}^{(0)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \quad x \in \mathcal{N},$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = -\underline{\mathbf{u}}^{(2)}, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.26)$$

На  $\mathcal{M}$  компоненты векторов  $\mathbf{u}^{(j)}$  и  $\mathbf{v}^{(j)}$  должны быть непрерывны. Следовательно, должны выполняться равенства

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n - \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (6.27)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n - \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.28)$$

Так как  $\mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n - \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n = 0$  при всех  $n$ , то в дальнейших рассуждениях будем учитывать только уравнение (6.28).

Преобразуем это уравнение так, чтобы получить вторую часть ПСФУ в стандартной форме. Из системы уравнений

$$\mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n = \mathbf{c}_n,$$

$$\mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n,$$

$$\mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n = \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n.$$

следует, что  $\mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n - \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n = [\mathbf{S}_{2,n} \mathbf{R}_{2,n}^{-1} - \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{P}_{2,n}^{-1}] \mathbf{c}_n$ . Тогда вторая часть ПСФУ в стандартной форме имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{S}_{2,n} \mathbf{R}_{2,n}^{-1} - \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{P}_{2,n}^{-1}] \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.29)$$

Имеет место

**Теорема 6.4.** *Задача сопряжения двух смежных полуплоскостей с условиями сопряжения (6.4), (6.23) сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению (6.26), (6.29).*

Разберем еще один случай, когда на  $\mathcal{N}$  должны быть выполнены условия скольжения без трения (6.5), а на  $\mathcal{M}$  – условия жесткого контакта с экраном (6.23).

Выберем для вспомогательной подзадачи условия сопряжения, которые должны быть выполнены на  $\mathcal{N}$  – условия (6.5). Пусть, как и раньше, решение вспомогательной задачи  $\underline{u}_x^{(1)}$ ,  $\underline{u}_y^{(1)}$ ,  $\underline{\sigma}_y^{(1)}$ ,  $\underline{\tau}^{(1)}$ ,  $\underline{u}_x^{(2)}$ ,  $\underline{u}_y^{(2)}$ ,  $\underline{\sigma}_y^{(2)}$ ,  $\underline{\tau}^{(2)}$ .

Найдем решение второй подзадачи. Обратим внимание, что одинаковых условий на  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{M}$  нет и, по условиям задачи,  $u_y^{(1)} = u_y^{(2)}$  должно быть выполнено всюду. Значит из четырех условий сопряжения, как на  $\mathcal{N}$ , так и на  $\mathcal{M}$ , только три будут образовывать независимую систему. На  $\mathcal{N}$ :

$$\sigma_y^{(2)} - \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = -\tau^{(0)} - \underline{\tau}^{(1)}, \quad \tau^{(2)} = -\underline{\tau}^{(2)}, \quad (6.30)$$

и на  $\mathcal{M}$ :

$$u_x^{(1)} = -u_x^{(0)} - \underline{u_x^{(1)}}, \quad u_x^{(2)} = -\underline{u_x^{(2)}}, \quad u_y^{(1)} = -u_y^{(0)} - \underline{u_y^{(1)}}, \quad (6.31)$$

Эти уравнения представим в векторной форме.

Из равенства  $u_y^{(1)} = u_y^{(2)}$  выразим  $D_n$  через  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ :

$$D_n = A_n \frac{\beta_{1,1n}}{L_n} - C_n - B_n \frac{\beta_{2,1n}}{L_n}.$$

Пусть

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} 2\mu_1 L_n^2 - \rho_1 \omega^2 - 2\mu_2 L_n \beta_{1,1n} \beta_{2,2n} & 2\mu_2 L_n^2 - \rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n \beta_{2,1n} \beta_{2,2n} & 2\mu_1 L_n^2 \beta_{1,2n} + 1 \\ 2\mu_1 L_n \beta_{1,1n} & 0 & \rho_1 \omega^2 - 2\mu_1 L_n^2 \\ 2\mu_2 L_n \beta_{1,1n} - \frac{\beta_{1,1n} \rho_2 \omega^2}{L_n} & -\frac{\beta_{2,1n} \rho_2 \omega^2}{L_n} & \rho_2 \omega^2 - 2\mu_2 L_n^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} L_n & 0 & \beta_{1,2n} \\ \frac{\beta_{1,1n} \beta_{2,2n}}{L_n} & L_n + \beta_{2,1n} & -\beta_{2,2n} \\ \beta_{1,2n} & 0 & -L_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_n = (0, \quad -\tau^{(0)} - \underline{\tau^{(1)}}, \quad -\underline{\tau^{(2)}}), \quad \tilde{\mathbf{q}}_n = (-u_x^{(0)} - \underline{u_x^{(1)}}, \quad -\underline{u_x^{(2)}}, \quad -u_y^{(0)} - \underline{u_y^{(1)}}),$$

а новый искомый вектор  $\mathbf{d}_n = (A_n, \quad B_n, \quad C_n)$ .

Запишем (6.30) и (6.31) в векторном виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_n \mathbf{d}_n e^{iL_n x} = \tilde{\mathbf{p}}_n, \quad x \in \mathcal{N},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_n \mathbf{d}_n e^{iL_n x} = \tilde{\mathbf{q}}_n, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Эти два уравнения можно привести к стандартной форме ПСФУ простой заменой переменных.

## 7. Задачи сопряжения в упруго-слоистых средах

Перейдем к более сложным задачам сопряжения упругих сред в слоистых структурах, когда слоев два и более, при этом хотя бы один из слоев представляет собой упругую полосу (см. рис. 5.1).

Квазипериодическое решение системы уравнений плоской теории упругости (1.2) в полосе

$\Omega_j$  имеет вид

$$\begin{aligned}
u_x^{(j)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(j)} L_n e^{i\beta_{j,1n}y} - B_n^{(j)} L_n e^{-i\beta_{j,1n}y} + C_n^{(j)} \beta_{j,2n} e^{i\beta_{j,2n}y} + D_n^{(j)} \beta_{j,2n} e^{-i\beta_{j,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
u_y^{(j)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(j)} \beta_{j,1n} e^{i\beta_{j,1n}y} + B_n^{(j)} \beta_{j,1n} e^{-i\beta_{j,1n}y} - C_n^{(j)} L_n e^{i\beta_{j,2n}y} + D_n^{(j)} L_n e^{-i\beta_{j,2n}y} \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_x^{(j)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ (\lambda(k_{j,1}^{(j)})^2 + 2\mu_j L_n^2) (A_n^{(j)} e^{i\beta_{j,1n}y} - B_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,1n}y}) + \right. \\
&\quad \left. + 2\mu_j L_n \beta_{j,2n} (C_n^{(j)} e^{i\beta_{j,2n}y} + D_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,2n}y}) \right] e^{iL_n x}, \\
\sigma_y^{(j)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ (\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) (A_n^{(j)} e^{i\beta_{j,1n}y} - B_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,1n}y}) - \right. \\
&\quad \left. - 2\mu_j L_n \beta_{j,2n} (C_n^{(j)} e^{i\beta_{j,2n}y} + D_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,2n}y}) \right] e^{iL_n x}, \\
\tau^{(j)}(x, y) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ 2\mu_j L_n \beta_{j,1n} (A_n^{(j)} e^{i\beta_{j,1n}y} + B_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,1n}y}) + \right. \\
&\quad \left. + (\rho_j \omega^2 - 2\mu_j L_n^2) (C_n^{(j)} e^{i\beta_{j,2n}y} - D_n^{(j)} e^{-i\beta_{j,2n}y}) \right] e^{iL_n x}.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Как и раньше, квазипериодические решения системы (1.2) в полуплоскостях должны удовлетворять условиям излучения.

Общая постановка двумерных задач сопряжения в слоистых областях была дана в п.5. В дальнейшем будем считать, что упругая волна от бесконечно удаленного источника всегда задана в области  $\Omega_1$ . Если искать решение задач сопряжения в слоистых областях в векторном виде, то

$$\mathbf{u}^{(0)}(x, y) = \mathbf{B}_{1,s} \mathbf{E}_{1,s}^-(y - h_1) \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{1,n} \mathbf{E}_{1,n}^+(y - h_1) \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x}, \tag{7.2}$$

$$\mathbf{u}^{(j)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{j,n} \mathbf{E}_{j,n}^+(y) \mathbf{a}_n^{(j)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{j,n} \mathbf{E}_{j,n}^-(y) \mathbf{b}_n^{(j)} e^{iL_n x}, \quad j = 2 \dots k, \tag{7.3}$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{k+1,n} \mathbf{E}_{k+1,n}^-(y - h_k) \mathbf{a}_n^{(k+1)} e^{iL_n x}, \tag{7.4}$$

здесь смещения по переменной  $y$  используются для упрощения формул. Векторы  $\mathbf{a}_n^{(j)} = (A_n^{(j)}, C_n^{(j)})$ ,  $\mathbf{b}_n^{(j)} = (B_n^{(j)}, D_n^{(j)})$  при  $j = 2 \dots k$ , векторы  $\mathbf{b}_s^{(0)}$ ,  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  и  $\mathbf{a}_n^{(k+1)}$  отличаются лишь некоторыми множителями. Матрицы  $\mathbf{A}_{j,n}$ ,  $\mathbf{B}_{j,n}$ ,  $j = 1 \dots k + 1$ ,  $\mathbf{E}_{j,n}^+(y)$ ,  $\mathbf{E}_{j,n}^-(y)$ ,  $j = 2 \dots k$ , определены формулами (6.10), (6.11), (6.12).

### 7.1. Упругий слой на жестком основании

Пусть упругая среда состоит из двух областей: верхней полуплоскости  $\Omega_1$  ( $y > h_1$ ) с параметрами среды  $\rho_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$  и полосы  $\Omega_2$  ( $h_1 > y > 0$ ) с параметрами среды  $\rho_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_2$ , расположенной на жестком основании ( $y < 0$ ). На прямой  $y = 0$  расположена периодическая

система дефектов (см. рис. 7.1). Из верхней полуплоскости набегают упругая волна. Требуется найти квазипериодические решения системы (1.2) в каждой области с учетом условий излучения.

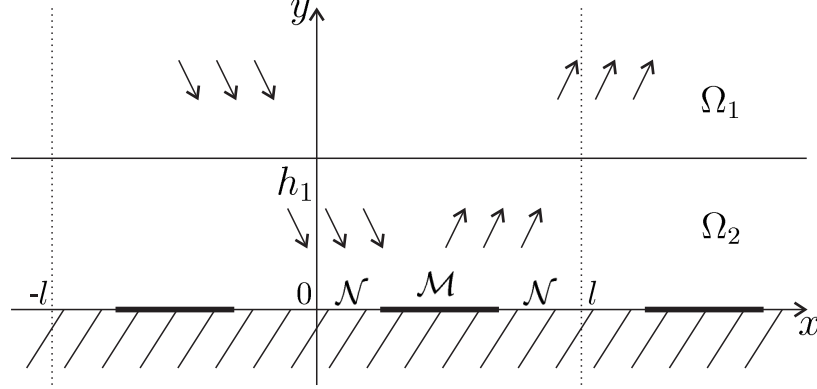


Рис. 7.1. Слоистая среда с системой дефектов

Зададим условия сопряжения упругих сред следующим образом. При  $y = h_1$  должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, h_1) + u_x^{(1)}(x, h_1) &= u_x^{(2)}(x, h_1), & u_y^{(0)}(x, h_1) + u_y^{(1)}(x, h_1) &= u_y^{(2)}(x, h_1), \\ \sigma_y^{(0)}(x, h_1) + \sigma_y^{(1)}(x, h_1) &= \sigma_y^{(2)}(x, h_1), & \tau^{(0)}(x, h_1) + \tau^{(1)}(x, h_1) &= \tau^{(2)}(x, h_1), \end{aligned} \quad (7.5)$$

а при  $y = 0$  – условия

$$u_x^{(2)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (7.6)$$

$$u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \tau^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (7.7)$$

Как и в случае сопряжения двух упругих полуплоскостей, будем искать решение поставленной задачи в виде суммы решений двух подзадач.

Сначала построим решение вспомогательной подзадачи, когда условия сопряжения всех слоев заданы равенствами (7.5), (7.6) на всем промежутке  $[0, l]$ . Используем определенные ранее матрицы  $\mathbf{P}_{j,n}$ ,  $\mathbf{Q}_{j,n}$ ,  $\mathbf{R}_{j,n}$ ,  $\mathbf{S}_{j,n}$  вида (6.14), (6.15). Тогда равенства (7.5), (7.6) приводят к системе векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \mathbf{S}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x} &= 0. \end{aligned}$$

Если векторы  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)}$  – решение этой системы, то  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(1)} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)} = 0$  при  $n \neq s$ , а векторы  $\tilde{\mathbf{a}}_s^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_s^{(2)}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_s^{(2)}$  – решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{P}_{1,s}\mathbf{a}_s^{(1)} &= \mathbf{P}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{R}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)}, \\ \mathbf{S}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{Q}_{1,s}\mathbf{a}_s^{(1)} &= \mathbf{Q}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{S}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)}, \\ \mathbf{P}_{2,s}\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{R}_{2,s}\mathbf{b}_s^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Обозначим решение первой подзадачи, как и раньше,  $\underline{u_x^{(1)}}(x, y)$ ,

$\underline{u_y^{(1)}}(x, y)$ ,  $\underline{\sigma_y^{(1)}}(x, y)$ ,  $\underline{\tau^{(1)}}(x, y)$ ,  $\underline{u_x^{(2)}}(x, y)$ ,  $\underline{u_y^{(2)}}(x, y)$ ,  $\underline{\sigma_y^{(2)}}(x, y)$ ,  $\underline{\tau^{(2)}}(x, y)$ .

Так как  $\underline{u_y^{(2)}}(x, 0) = 0$  и на  $\mathcal{N}$ , и на  $\mathcal{M}$ , то условия сопряжения (7.5)-(7.7) для второй подзадачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_x^{(1)}(x, h_1) &= u_x^{(2)}(x, h_1), \quad u_y^{(1)}(x, h_1) = u_y^{(2)}(x, h_1), \\ \sigma_y^{(1)}(x, h_1) &= \sigma_y^{(2)}(x, h_1), \quad \tau^{(1)}(x, h_1) = \tau^{(2)}(x, h_1), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$u_x^{(2)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (7.10)$$

$$u_y^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \underline{\tau^{(2)}}(x, 0) + \tau^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (7.11)$$

Введем матрицы размерности  $2 \times 1$ , составленные из четвертых строк матриц  $\mathbf{A}_{2,n}$  и  $\mathbf{B}_{2,n}$ :

$$\mathbf{C}_{2,n} = (2i\mu_2 L_n \beta_{2,1n}, \quad i\rho_2 \omega^2 - 2i\mu_2 L_n^2), \quad \mathbf{D}_{2,n} = (2i\mu_2 L_n \beta_{2,1n}, \quad 2i\mu_2 L_n^2 - i\rho_2 \omega^2).$$

Первая часть ПСФУ может быть получена из условия  $\tau^{(2)}(x, 0) = -\underline{\tau^{(2)}}(x, 0)$  на  $\mathcal{M}$ . Введем новую неизвестную величину, в данном случае новый неизвестный скаляр

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{C}_{2,n}\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{D}_{2,n}\mathbf{b}_n^{(2)}. \quad (7.12)$$

Получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = -\underline{\tau^{(2)}}(x, 0), \quad x \in \mathcal{M}. \quad (7.13)$$

Построим еще четыре матрицы размерности  $2 \times 1$ , составленные из первых и вторых строк матриц  $\mathbf{A}_{2,n}$  и  $\mathbf{B}_{2,n}$ :

$$\mathbf{G}_{2,n} = (L_n, \quad \beta_{2,2n}), \quad \mathbf{H}_{2,n} = (-L_n, \quad \beta_{2,2n}),$$

$$\mathbf{I}_{2,n} = (\beta_{2,1n}, \quad -L_n), \quad \mathbf{F}_{2,n} = (\beta_{2,1n}, \quad L_n).$$

Запишем в векторном виде уравнение, которое должно быть выполнено только на  $\mathcal{N}$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{G}_{2,n}\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{H}_{2,n}\mathbf{b}_n^{(2)}] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Приведем это уравнение к стандартной форме. Из уравнений (7.9) следует, что

$$\mathbf{P}_{1,n}^{-1}[\mathbf{P}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}] = \mathbf{Q}_{1,s}^{-1}[\mathbf{Q}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}]. \quad (7.14)$$



Из условий (7.10), (7.11) следует, что и на  $\mathcal{N}$ , и на  $\mathcal{M}$  должно быть выполнено условие

$$\mathbf{I}_{2,n}\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{F}_{2,n}\mathbf{b}_n^{(2)} = 0. \quad (7.15)$$

Пусть векторы  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)}, \tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)}$  – решение системы уравнений (7.12), (7.14), (7.15) при  $\mathbf{c}_n = 1$ , тогда  $\mathbf{a}_n^{(2)} = \tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)}\mathbf{c}_n$ ,  $\mathbf{b}_n^{(2)} = \tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)}\mathbf{c}_n$ . Поэтому вторая часть ПСФУ в стандартной форме имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{G}_{2,n}\tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)} + \mathbf{H}_{2,n}\tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)}]\mathbf{c}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (7.16)$$

Отметим, что выбранный способ сведения исходной задачи к ПСФУ не единственный. Например, можно получить ПСФУ следующим образом. Не будем разбивать исходную задачу на две подзадачи. Используем условия сопряжения при  $y = h_1$ , получим выражения для коэффициентов  $A_n^{(1)}, C_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  через коэффициенты  $C_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ . Далее, из условия  $u_y^{(2)}(x, 0) = 0$ , которое должно быть выполнено всюду, получим выражения для коэффициентов  $C_n^{(2)}$  через  $D_n^{(2)}$ . Тогда уравнения  $u_x^{(2)}(x, 0) = 0$  на  $\mathcal{N}$  и  $\tau^{(2)}(x, 0) = 0$  на  $\mathcal{M}$  образуют систему уравнений относительно только одного набора неизвестных коэффициентов  $D_n^{(2)}$ . Сделаем еще одну замену искомых коэффициентов так, чтобы получить нуль в правой части уравнения, которое должно быть выполнено на  $\mathcal{N}$ .

## 7.2. Две полосы с периодической системой дефектов

Рассмотрим более сложную задачу. Пусть теперь количество слоев три, при этом, периодическая система дефектов расположена на границе сопряжения упругих сред  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Параметры сред зададим следующим образом:  $\rho_1, \mu_1, \lambda_1$  в области  $D_1$ ,  $\rho_2, \mu_2, \lambda_2$  в области  $D_2$  и  $\rho_3, \mu_3, \lambda_3$  в области  $\Omega_3$ . Упругая слоистая среда расположена на жестком основании, при этом пусть система координат задана так, что  $h_2 = 0$  (см. рис. 7.2).

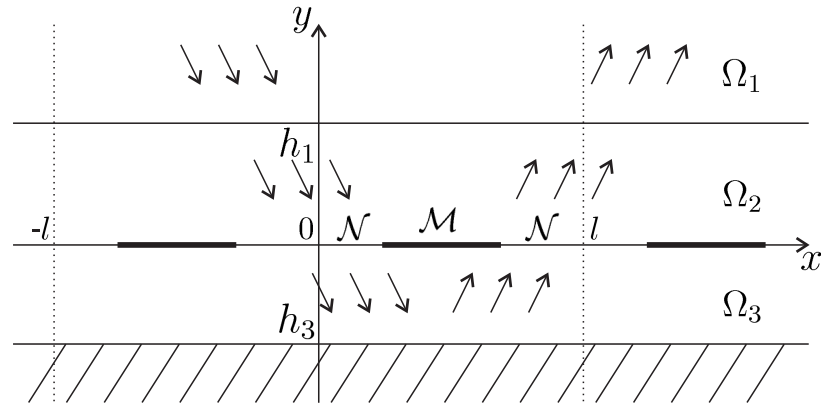


Рис. 7.2. Слоистая упругая среда с дефектами

Зададим условия сопряжения следующим образом: при  $y = h_1$ ,  $y = h_3$ , а также на  $\mathcal{N}$  должны быть выполнены условия полного контакта. В качестве дефектов возьмем бесконечно тонкие жесткие пластины – экраны, то есть на  $\mathcal{M}$  должны быть выполнены условия вида (5.3).

Пусть  $\underline{u}_x^{(1)}, \underline{u}_y^{(1)}, \underline{\sigma}_y^{(1)}, \underline{\tau}^{(1)}, \underline{u}_x^{(2)}, \underline{u}_y^{(2)}, \underline{\sigma}_y^{(2)}, \underline{\tau}^{(2)}, \underline{u}_x^{(3)}, \underline{u}_y^{(3)}, \underline{\sigma}_y^{(3)}, \underline{\tau}^{(3)}$  – решение задачи сопряжения упругих сред, когда на всех границах должны быть выполнены условия полного контакта. Это решение легко построить, если решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \mathbf{S}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{3,n} \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{3,n} \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{3,n} \mathbf{E}_{3,n}^+(h_3) \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{E}_{3,n}^-(h_3) \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x} &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем к задаче о возмущении упругой среды периодической системой дефектов. Пусть  $\underline{\mathbf{u}} = (\underline{u}_x^{(2)}, \underline{u}_y^{(2)})$  и  $\underline{\mathbf{v}} = (\underline{u}_x^{(3)}, \underline{u}_y^{(3)})$ . Из условий на  $\mathcal{M}$  следует, что должны быть выполнены два векторных уравнения

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)}] e^{iL_n x} = -\underline{\mathbf{u}}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{P}_{3,n} \mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(3)}] e^{iL_n x} = -\underline{\mathbf{v}}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Чтобы построить первую часть ПСФУ, достаточно взять только одно из этих уравнений. Пусть  $\mathbf{c}_n = \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)}$ , тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = -\underline{\mathbf{u}}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (7.17)$$

Равенства  $u_x^{(2)}(x, h_2) = u_x^{(3)}(x, h_2)$ ,  $u_y^{(2)}(x, h_2) = u_y^{(3)}(x, h_2)$  должны быть выполнены и на  $\mathcal{N}$ , и на  $\mathcal{M}$ . Тогда для построения второй части ПСФУ на  $\mathcal{N}$  остаются два условия, которые в векторной форме имеют вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} - \mathbf{Q}_{3,n} \mathbf{a}_n^{(3)} - \mathbf{S}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(3)}] e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Если векторы  $\tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)}, \tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)}, \tilde{\mathbf{a}}_n^{(3)}, \tilde{\mathbf{b}}_n^{(3)}$  – решение системы векторных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,n}^{-1} [\mathbf{P}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)}] &= \mathbf{Q}_{1,n}^{-1} [\mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)}], \\ \mathbf{P}_{3,n} \mathbf{E}_{3,n}^+(h_3) \mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{E}_{3,n}^-(h_3) \mathbf{b}_n^{(3)} &= 0, \\ \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} &= \mathbf{c}_n, \\ \mathbf{P}_{3,n} \mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(3)} &= \mathbf{c}_n \end{aligned}$$

при  $\mathbf{c}_n = (1, 1)$ , тогда вторая часть ПСФУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{Q}_{2,n} \tilde{\mathbf{a}}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n} \tilde{\mathbf{b}}_n^{(2)} - \mathbf{Q}_{3,n} \tilde{\mathbf{a}}_n^{(3)} - \mathbf{S}_{3,n} \tilde{\mathbf{b}}_n^{(3)}] \mathbf{c}_n e^{iL_n x} = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Рассмотрим еще один вариант задачи сопряжения. Пусть, как и в предыдущей задаче, в области  $\Omega_1$  параметры среды  $\rho_1, \mu_1, \lambda_1$ . В областях  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  среды имеют одинаковые параметры  $\rho_2, \mu_2, \lambda_2$ . Периодическая система дефектов расположена на границе сопряжения  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . При этом пусть нижняя полуплоскость  $\Omega_4$  ( $y < h_3$ ) имеет параметры среды  $\rho_3, \mu_3, \lambda_3$  (см. рис. 7.3). Везде, кроме  $\mathcal{M}$ , потребуем, чтобы были выполнены условия полного контакта, а на дефектах – условия скольжения вдоль экрана без трения (5.4).

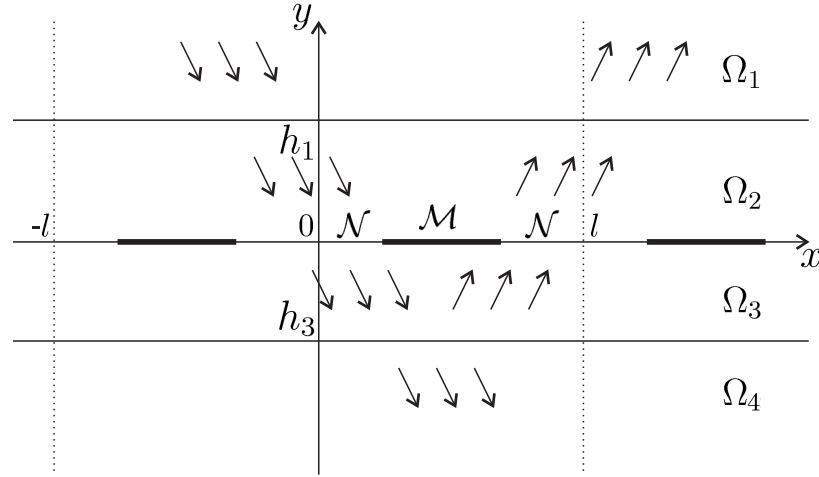


Рис. 7.3. Дефекты в однородной упругой среде

Напомним, что представления волн в векторном виде для всех слоев заданы по формулам (7.2)-(7.4).

Решим вспомогательную задачу. Очевидно, что система уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \mathbf{S}_{1,s} \mathbf{b}_s^{(0)} e^{iL_s x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{1,n} \mathbf{a}_n^{(1)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_1) \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_1) \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_3) \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_3) \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(4)} e^{iL_n x}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^+(h_3) \mathbf{a}_n^{(3)} e^{iL_n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{E}_{2,n}^-(h_3) \mathbf{b}_n^{(3)} e^{iL_n x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{3,n} \mathbf{b}_n^{(4)} e^{iL_n x}, \end{aligned}$$

имеет решение. Следовательно, решение вспомогательной задачи существует. При этом из третьего и четвертого уравнений системы видно, что  $\underline{\sigma}_y^{(2)} = \underline{\sigma}_y^{(3)}$  и  $\underline{\tau}^{(2)} = \underline{\tau}^{(3)}$ .

Пусть теперь вектор  $\underline{\mathbf{u}}$  задан следующим образом:  $\underline{\mathbf{u}} = (\underline{\sigma}_y^{(2)}, \underline{\tau}^{(2)})$ . Для второй подзадачи из условий сопряжения на  $\mathcal{M}$  следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)}] e^{iL_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(3)}] e^{iL_n x} = -\underline{\mathbf{u}}.$$

Как и раньше, обозначим

$$\mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(2)} = \mathbf{Q}_{2,n} \mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{S}_{2,n} \mathbf{b}_n^{(3)} = \mathbf{c}_n. \quad (7.18)$$

Получим первую часть ПСФУ в виде (7.17).

Два условия сопряжения на  $\mathcal{N}$ , которых нет на  $\mathcal{M}$ , дают одно векторное уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{Q}_{2,n} (\mathbf{a}_n^{(2)} - \mathbf{a}_n^{(3)}) + \mathbf{S}_{2,n} (\mathbf{b}_n^{(2)} - \mathbf{b}_n^{(3)})] e^{iL_n x} = 0.$$

Это уравнение легко привести к стандартной форме, используя оставшиеся условия сопряжения и равенство (7.18).

### 7.3. Алгоритм решения задач в упруго-слоистых средах

В предыдущих пунктах был рассмотрен ряд задач плоской теории упругости с периодическими системами дефектов на границе сопряжения сред. Каждая из задач сведена к парному сумматорному функциональному уравнению, все эти уравнения имеют один и тот же вид. В свою очередь, такие ПСФУ сводятся как к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, решение которых может быть получено методом редукции, так и к интегральным уравнениям с логарифмическими особенностями в ядрах или к гиперсингулярным уравнениям, приближенное решение которых может быть получено численно.

Приведем ряд рассуждений, на основе которых сформулируем алгоритм решения задач дифракции упругих волн на периодических системах дефектов в многослойных упругих средах.

Рассмотрим многослойную среду из  $k + 1$  слоев с периодической системой дефектов на границе  $y = h_j$  (см. рис. 5.1, рис. 5.2). Общая постановка задач сопряжения в такой многослойной среде дана в п.5. Будем искать решение в каждом упругом слое в виде волн Флоке. Тогда в неограниченных областях, где решение должно быть найдено с учетом условий на бесконечности, ищем по два набора неизвестных коэффициентов. В областях, представляющих собой упругие полосы, нужно искать по четыре набора неизвестных коэффициентов. Для простоты будем считать, что условия сопряжения сред соответствуют условиям полного

контакта везде, кроме  $\mathcal{M}$  – участка границы с дефектами в промежутке  $[0, l)$ . При другом выборе условий сопряжения все рассуждения такие же.

Последовательно исключим из рассмотрения искомые коэффициенты Флоке упругих волн в тех слоях, которые не контактируют с дефектами. Это можно сделать следующим образом. Будем искать решение в каждом слое в векторной форме в виде (7.2), (7.3), (7.4). На границе сопряжения сред при  $y = h_1$  и условии  $j \neq 1$ , получим векторную систему уравнений для амплитуд с номерами  $s$

$$\mathbf{B}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{A}_{1,s}\mathbf{a}_s^{(1)} = \mathbf{A}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{B}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)},$$

и систему уравнений для амплитуд с номерами  $n \neq s$

$$\mathbf{A}_{1,n}\mathbf{a}_n^{(1)} = \mathbf{A}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{B}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}.$$

Используем построенные раньше матрицы  $\mathbf{P}_{m,n}$ ,  $\mathbf{Q}_{m,n}$ ,  $\mathbf{R}_{m,n}$ ,  $\mathbf{S}_{m,n}$ , где в общем случае  $m = 1 \dots k + 1$ . Тогда при  $n = s$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{P}_{1,s}\mathbf{a}_s^{(1)} &= \mathbf{P}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{R}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)}, \\ \mathbf{S}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)} + \mathbf{Q}_{1,s}\mathbf{a}_s^{(1)} &= \mathbf{Q}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{S}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

и при  $n \neq s$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,n}\mathbf{a}_n^{(1)} &= \mathbf{P}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}, \\ \mathbf{Q}_{1,n}\mathbf{a}_n^{(1)} &= \mathbf{Q}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Из систем уравнений (7.19), (7.20) исключим векторы  $\mathbf{a}_s^{(1)}$  и  $\mathbf{a}_n^{(1)}$ , определяющие упругую волну в верхней полуплоскости. Получим уравнения, определяющие связи между векторами  $\mathbf{a}_n^{(2)}$  и  $\mathbf{b}_n^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,s}^{-1}[\mathbf{P}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{R}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)} - \mathbf{R}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)}] &= \\ &= \mathbf{Q}_{1,s}^{-1}[\mathbf{Q}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^+(h_1)\mathbf{a}_s^{(2)} + \mathbf{S}_{2,s}\mathbf{E}_{2,s}^-(h_1)\mathbf{b}_s^{(2)} - \mathbf{S}_{1,s}\mathbf{b}_s^{(0)}], \\ \mathbf{P}_{1,n}^{-1}[\mathbf{P}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}] &= \\ &= \mathbf{Q}_{1,n}^{-1}[\mathbf{Q}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_1)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_1)\mathbf{b}_n^{(2)}], \quad n \neq s. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Запишем условия сопряжения на второй границе при  $y = h_2$  и  $j \neq 1, 2$ . Эти условия в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_2)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{R}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_2)\mathbf{b}_n^{(2)} &= \mathbf{P}_{3,n}\mathbf{E}_{3,n}^+(h_2)\mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{R}_{3,n}\mathbf{E}_{3,n}^-(h_2)\mathbf{b}_n^{(3)}, \\ \mathbf{Q}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^+(h_2)\mathbf{a}_n^{(2)} + \mathbf{S}_{2,n}\mathbf{E}_{2,n}^-(h_2)\mathbf{b}_n^{(2)} &= \mathbf{Q}_{3,n}\mathbf{E}_{3,n}^+(h_2)\mathbf{a}_n^{(3)} + \mathbf{S}_{3,n}\mathbf{E}_{3,n}^-(h_2)\mathbf{b}_n^{(3)}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Получим выражения  $\mathbf{a}_n^{(2)}$ ,  $\mathbf{b}_n^{(2)}$  через  $\mathbf{a}_n^{(3)}$ ,  $\mathbf{b}_n^{(3)}$  из уравнений (7.22) и подставим в уравнения (7.21). Тогда коэффициенты определяющие упругую волну Флоке во второй области будут исключены из уравнений.

По этой же схеме можно исключить из полной системы уравнений векторы  $\mathbf{a}_n^{(m)}$  и  $\mathbf{b}_n^{(m)}$ ,  $m \neq j, j+1$ , относящиеся к слоям упругой среды, не контактирующим с дефектами. Заметим, что исключать группы искоемых коэффициентов можно как начиная с первого слоя, так и начиная с последнего.

Аналогичный прием можно применять при разделении исходной задачи на две подзадачи. При решении первой подзадачи можно иметь дело системой векторных уравнений только относительно искоемых коэффициентов одного упругого слоя.

Во всех рассмотренных выше задачах периодическая система дефектов была расположена только на одной границе раздела упругих слоев. Если дефекты присутствуют на двух и более границах сопряжения сред, то возможны разные ситуации.

Наиболее прост случай, когда системы дефектов, расположенных на разных границах сопряжения упругих сред, имеют один и тот же период. При этом, разумеется, размеры неоднородностей в разных системах дефектов могут быть различными (см. рис. 7.4). Это различие проявится только при вычислении интегралов  $I_n^{(m)}$ ,  $J_n^{(m)}$  (см. п.3, формулы (3.12)), где  $m$  – номера слоев контактирующих с дефектами.

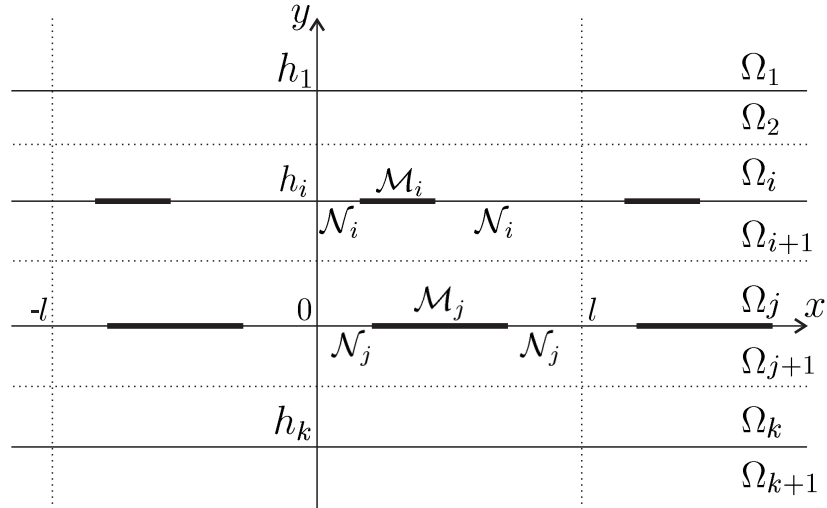


Рис. 7.4. Две системы дефектов с периодом  $l$ .

Если системы дефектов имеют разные периоды, то нужно найти наименьшее общее кратное двух периодов и перейти к рассмотренному ранее случаю.

Сформулируем три правила, которые помогают свести к ПСФУ любые периодические

задачи дифракции упругой волны в слоистой среде и другие разрывные задачи сопряжения для многослойной плоскости.

**Правило 7.1.** *Исходная задача разделяется на две подзадачи. Сначала строится решение задачи сопряжения без дефектов с условиями сопряжения, продолженными с  $\mathcal{N}$  на всю границу раздела слоев.*

**Правило 7.2.** *При сведении задачи о возмущении упругой среды от дефектов к ПСФУ в стандартной форме нужно выбрать новые неизвестные по тем условиям сопряжения, которые заданы и на  $\mathcal{M}$ , и на  $\mathcal{N}$ .*

**Правило 7.3.** *Неоднородная часть ПСФУ строится по граничным условиям, заданным на  $\mathcal{M}$ , а однородная часть – по условиям сопряжения, заданным только на  $\mathcal{N}$ .*

## Глава 3. Трехмерные двоякопериодические задачи

В третьей главе рассмотрены граничные задачи для системы уравнений трехмерной теории упругости в полупространстве в классе двоякопериодических функций. Получено общее решение системы уравнений теории упругости, квазипериодическое по двум переменным. Выделены шесть типов элементарных волн Флоке и исследованы их энергетические характеристики. Подробно рассмотрены основные граничные задачи в полупространстве, к которым сводятся задачи об отражении упругой волны от границы упругого полупространства при различных условиях взаимодействия полупространства с внешней средой. Найдены условия разрешимости двух переопределенных граничных задач. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, размещенных на границе полупространства, сведена (в двух вариантах) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Флоке отраженной волны. В последнем параграфе главы кратко рассмотрена одна задача сопряжения двух упругих полупространств – задача об отражении и преломлении упругой волны на плоской границе раздела сред.

### 8. Квазипериодические по двум переменным решения уравнений трехмерной теории упругости

В этом параграфе диссертации получено общее решение системы уравнений трехмерной теории упругости в классе функций, гармонически зависящих от времени и квазипериодических по двум пространственным переменным.

#### 8.1. Уравнения пространственной теории упругости

В трехмерной динамической теории упругости в декартовой системе координат состояние упругой среды описывают две величины: вектор перемещений  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z) = (u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z))$  и симметричный тензор напряжений

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) & \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{xz}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{yy}(x, y, z) & \sigma_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) & \sigma_{zy}(x, y, z) & \sigma_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{U}$  и тензора  $\Sigma$  – вещественнозначные функции.



Уравнения пространственной теории упругости в координатах имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), & \sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),\end{aligned}\tag{8.2}$$

где  $\rho$  – плотность упругой среды,  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе.

Применим метод комплексных амплитуд. Пусть упругое поле гармонически зависит от времени. Зависимость от времени имеет вид  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота.

Будем обозначать комплексные амплитуды вещественнозначных функций так же, как и исходные функции. Система уравнений для комплекснозначных амплитуд состоит из трех уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0,\end{aligned}\tag{8.3}$$

и шести уравнений того же вида, что и уравнения (8.2). Эту систему уравнений легко преобразовать к системе дифференциальных уравнений второго порядка, которая является аналогом системы уравнений Ламе плоской теории упругости:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_x &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_z &= 0.\end{aligned}\tag{8.4}$$

В уравнениях (8.4) содержатся только компоненты вектора перемещений  $\mathbf{U}$ , точнее их комплекснозначные амплитуды.

Пусть  $\widetilde{\mathbf{U}}$  – решение системы уравнений (8.1), (8.2) или системы уравнений (8.4). Если  $\text{rot}(\widetilde{\mathbf{U}}) = 0$ , тогда  $\widetilde{\mathbf{U}}$  определяет продольную упругую волну. Если  $\text{div}(\widetilde{\mathbf{U}}) = 0$ , тогда  $\widetilde{\mathbf{U}}$  – поперечная упругая волна.

От перемещений и напряжений можно перейти к новым искомым функциям – потенциалам. С методами потенциала в теории упругости можно ознакомиться в монографии Купрадзе В.Д. [22]. В нашем случае скалярный продольный  $\varphi$  и поперечный векторный  $\psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$  потенциалы должны быть решениями уравнений Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_2^2 \psi = 0, \quad (8.5)$$

где, как и раньше, волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  определены формулами (1.5). Тогда  $\mathbf{U} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi$  и компоненты вектора  $\psi$  удовлетворяют условию  $\text{div } \psi = 0$ .

Как отмечено в работе [43], исследование граничных задач и задач дифракции для системы уравнений (8.1), (8.2) сведением их к аналогичным задачам для системы уравнений (8.5) – трудоемкий процесс. При решении задач пространственной теории упругости удобнее использовать исходные уравнения или систему дифференциальных уравнений второго порядка (8.4).

## 8.2. Решения, квазипериодические по двум переменным

Будем искать решения системы пространственной теории упругости в виде квазипериодических по двум переменным комплекснозначных функций вида

$$f(x, y, z) = e^{i\alpha_x x} e^{i\alpha_y y} f_0(x, y, z),$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  – параметры Флоке,  $f_0(x, y, z)$  – периодическая по двум аргументам  $x$  и  $y$  функция с периодами  $l_x$  и  $l_y$  соответственно. Будем предполагать, что функция  $f_0(x, y, z)$  разлагается в двойной ряд Фурье по переменным  $x$  и  $y$ , тогда

$$f(x, y, z) = e^{i\alpha_x x} e^{i\alpha_y y} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn}(z) e^{i\frac{2\pi}{l_x} m x} e^{i\frac{2\pi}{l_y} n y} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn}(z) e^{iL_{xm} x} e^{iL_{yn} y}, \quad (8.6)$$

$$L_{xm} = \alpha_x + \frac{2\pi m}{l_x}, \quad L_{yn} = \alpha_y + \frac{2\pi n}{l_y}.$$

Подставим функции напряжений и перемещений в виде (8.6) в уравнения (8.3) и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для их коэффициентов Флоке

$$\begin{aligned}
iL_{xm}\sigma_{xxmn}(z) + iL_{yn}\sigma_{xymn}(z) + \sigma'_{xzm n}(z) + \rho\omega^2 u_{xmn}(z) &= 0, \\
iL_{xm}\sigma_{xymn}(z) + iL_{yn}\sigma_{yy mn}(z) + \sigma'_{yzmn}(z) + \rho\omega^2 u_{ymn}(z) &= 0, \\
iL_{xm}\sigma_{xzm n}(z) + iL_{yn}\sigma_{yzmn}(z) + \sigma'_{zzmn}(z) + \rho\omega^2 u_{zmn}(z) &= 0, \\
\sigma_{xxmn}(z) &= i(\lambda + 2\mu)L_{xm}u_{xmn}(z) + i\lambda L_{yn}u_{ymn}(z) + \lambda u'_{zmn}(z), \\
\sigma_{yy mn}(z) &= i(\lambda + 2\mu)L_{yn}u_{ymn}(z) + i\lambda L_{xm}u_{xmn}(z) + \lambda u'_{zmn}(z), \\
\sigma_{zzmn}(z) &= (\lambda + 2\mu)u'_{zmn}(z) + i\lambda L_{xm}u_{xmn}(z) + i\lambda L_{yn}u_{ymn}(z), \\
\sigma_{xymn}(z) &= i\mu(L_{yn}u_{xmn}(z) + L_{xm}u_{ymn}(z)), \\
\sigma_{xzm n}(z) &= \mu(u'_{xmn}(z) + iL_{xm}u_{zmn}(z)), \\
\sigma_{yzmn}(z) &= \mu(u'_{ymn}(z) + iL_{yn}u_{zmn}(z)).
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Исключим функции  $\sigma_{xxmn}(z)$ ,  $\sigma_{yy mn}(z)$ ,  $\sigma_{xymn}(z)$  из уравнений (8.7) и перепишем оставшиеся уравнения в виде

$$\begin{aligned}
u'_{xmn}(z) &= -iL_{xm}u_{zmn}(z) + \frac{1}{\mu}\sigma_{xzm n}(z), \quad u'_{ymn}(z) = -iL_{yn}u_{zmn}(z) + \frac{1}{\mu}\sigma_{yzmn}(z), \\
u'_{zmn}(z) &= -iL_{xm}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}u_{xmn}(z) - iL_{yn}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}u_{ymn}(z) + \frac{1}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \\
\sigma'_{xzm n}(z) &= \left( \left( \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) L_{xm}^2 + \mu L_{yn}^2 - \rho\omega^2 \right) u_{xmn}(z) + \\
&\quad + L_{xm}L_{yn} \left( \lambda + \mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) u_{ymn}(z) - iL_{xm}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \\
\sigma'_{yzmn}(z) &= L_{xm}L_{yn} \left( \lambda + \mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) u_{xmn}(z) + \\
&\quad + \left( \left( \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) L_{yn}^2 + \mu L_{xm}^2 - \rho\omega^2 \right) u_{ymn}(z) - iL_{yn}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \\
\sigma'_{zzmn}(z) &= -\rho\omega^2 u_{zmn}(z) - iL_{xm}\sigma_{xzm n}(z) - iL_{yn}\sigma_{yzmn}(z).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Обозначим

$$\beta_{jmn} = \sqrt{k_j^2 - L_{xm}^2 - L_{yn}^2} = \begin{cases} |L_{xm}^2 + L_{yn}^2| \leq k_j^2 : & i\sqrt{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 - k_j^2}, \\ |L_{xm}^2 + L_{yn}^2| \geq k_j^2 : & -\sqrt{k_j^2 - L_{xm}^2 - L_{yn}^2}, \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Будем считать, что  $\beta_{jmn} \neq 0$ , при  $j = 1, 2$ . Случай, когда для некоторых индексов  $m, n$  обращается в нуль число  $\beta_{1mn}$  или число  $\beta_{2mn}$ , в данной работе не рассматривается.

Найдем общее решение системы уравнений (8.8). Матрица коэффициентов этой системы дифференциальных уравнений первого порядка имеет шесть собственных значений:

$$\pm i\beta_{1mn}, \quad \pm i\beta_{2mn}, \quad \pm i\beta_{2mn}.$$

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{mn}^{1,2} &= \left( L_{xm}, \quad L_{yn}, \quad \pm\beta_{1mn}, \quad \pm 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm}, \quad \pm 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn}, \quad i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) \right), \\ \mathbf{h}_{mn}^{3,4} &= \left( \beta_{2mn}, \quad 0, \quad \mp L_{xm}, \quad \pm i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2), \quad \mp i\mu L_{xm}L_{yn}, \quad -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} \right), \\ \mathbf{h}_{mn}^{5,6} &= \left( 0, \quad \beta_{2mn}, \quad \mp L_{yn}, \quad \mp i\mu L_{xm}L_{yn}, \quad \pm i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2), \quad -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn} \right).\end{aligned}$$

Объединим перемещения и напряжения в один искомый вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) = (u_x, u_y, u_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ . Определим матрицы  $\mathbf{A}_{mn}$  и  $\mathbf{B}_{mn}$  следующим образом:

$$\mathbf{A}_{mn} = \begin{pmatrix} L_{xm} & \beta_{2mn} & 0 \\ L_{yn} & 0 & \beta_{2mn} \\ \beta_{1mn} & -L_{xm} & -L_{yn} \\ 2i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{xm} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & -i\mu L_{xm}L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & -i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2) & i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & 0 \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2) & 0 & i2\mu\beta_{2mn}L_{yn} \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) & -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn} \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{pmatrix} L_{xm} & \beta_{2mn} & 0 \\ L_{yn} & 0 & \beta_{2mn} \\ -\beta_{1mn} & L_{xm} & L_{yn} \\ 2i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{xm} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & i\mu L_{xm}L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & i\mu L_{xm}L_{yn} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2) & i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & 0 \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2) & 0 & i2\mu\beta_{2mn}L_{yn} \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) & -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Матрицы  $\mathbf{E}_{mn}^+(z)$  и  $\mathbf{E}_{mn}^-(z)$  определим так:

$$\mathbf{E}_{mn}^+(z) = \begin{pmatrix} e^{i\beta_{1mn}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_{2mn}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_{2mn}z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{mn}^-(z) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_{1mn}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_{2mn}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\beta_{2mn}z} \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 8.1.** *Общее квазипериодическое решение системы уравнений (8.2)–(8.3) имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{mn} \mathbf{E}_{mn}^+(z) \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{mn} \mathbf{E}_{mn}^-(z) \mathbf{b}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $\mathbf{a}_{mn}$ ,  $\mathbf{b}_{mn}$  – произвольные постоянные векторы.

Как и в двумерном случае, каждая гармоника Флоке представляет собой сумму шести слагаемых – элементарных волн. Выпишем их компоненты:

волна типа  $A$

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= L_{xm} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad u_y(x, y, z) = L_{yn} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ u_z(x, y, z) &= \beta_{1mn} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= 2i\mu L_{xm} L_{yn} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xz}(x, y, z) &= 2i\mu L_{xm} \beta_{1mn} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= 2i\mu L_{yn} \beta_{1mn} e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xx}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2) e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2) e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{zz}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu \beta_{1mn}^2) e^{i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}; \end{aligned} \quad (8.13)$$

волна типа  $B$

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= L_{xm} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad u_y(x, y, z) = L_{yn} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ u_z(x, y, z) &= -\beta_{1mn} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= 2i\mu L_{xm} L_{yn} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{xm} \beta_{1mn} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{yn} \beta_{1mn} e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xx}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2) e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2) e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{zz}(x, y, z) &= i(\lambda k_1^2 + 2\mu \beta_{1mn}^2) e^{-i\beta_{1mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}; \end{aligned} \quad (8.14)$$

волна типа  $C$

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad u_y(x, y, z) = 0, \\ u_z(x, y, z) &= -L_{xm} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xz}(x, y, z) &= i\mu (\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= -i\mu L_{xm} L_{yn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\ \sigma_{xx}(x, y, z) &= 2i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad \sigma_{yy}(x, y, z) = 0, \\ \sigma_{zz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}; \end{aligned} \quad (8.15)$$

волна типа  $D$

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad u_y(x, y, z) = 0, \\
u_z(x, y, z) &= L_{xm} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= -i\mu (\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= i\mu L_{xm} L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xx}(x, y, z) &= 2i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad \sigma_{yy}(x, y, z) = 0, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y};
\end{aligned} \tag{8.16}$$

волна типа  $E$

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= 0, \quad u_y(x, y, z) = \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
u_z(x, y, z) &= -L_{yn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= -i\mu L_{xm} L_{yn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= i\mu (\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xx}(x, y, z) &= 0, \quad \sigma_{yy}(x, y, z) = 2i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y};
\end{aligned} \tag{8.17}$$

волна типа  $H$

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= 0, \quad u_y(x, y, z) = \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
u_z(x, y, z) &= L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= i\mu L_{xm} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= i\mu L_{xm} L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= -i\mu (\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{xx}(x, y, z) &= 0, \quad \sigma_{yy}(x, y, z) = 2i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= -2i\mu L_{yn} \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Компоненты произвольных векторов в представлении (8.12) будем в дальнейшем обозначать в соответствии с типами волн:  $\mathbf{a}_{mn} = (A_{mn}, C_{mn}, E_{mn})$ ,  $\mathbf{b}_{mn} = (B_{mn}, D_{mn}, H_{mn})$ .

## 9. Энергетические характеристики упругих волн

Чтобы определить ориентацию отдельных элементарных гармоник Флоке, исследуем их энергетические характеристики.

### 9.1. Закон сохранения энергии

Получим дифференциальное тождество вида (2.1) из системы уравнений трехмерной динамической теории упругости (8.1)–(8.2).

**Теорема 9.1.** Если  $u_x, u_y, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  – решение системы уравнений (8.1)–(8.2), то

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] \left. \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xx} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{xy} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{xz} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xy} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{yy} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{yz} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xz} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{yz} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{zz} \right] \end{aligned} \quad (9.1)$$

(закон сохранения энергии).

Доказательство. Преобразуем уравнения системы (8.1)–(8.2). Умножим их на специальным образом подобранные множители:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad \times \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad \times \frac{\partial u_y}{\partial t} \\ & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad \times \frac{\partial u_z}{\partial t} \\ & \sigma_{xx} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} \\ & \sigma_{yy} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} - \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial^2 u_y}{\partial t \partial y} \\ & \sigma_{zz} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial^2 u_z}{\partial t \partial z} \\ & \sigma_{xy} - \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ & \sigma_{yz} - \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ & \sigma_{xz} - \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Сложим и перегруппируем слагаемые. Получим равенство (9.1).

Из теоремы 9.1 следует, что плотность энергии

$$E = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \lambda \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]$$

и компоненты вектора Умова-Пойнтинга

$$\mathbf{P}_x = -\frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xx} - \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{xy} - \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{xz}, \quad \mathbf{P}_y = -\frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xy} - \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{yy} - \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{yz},$$

$$\mathbf{P}_z = -\frac{\partial u_x}{\partial t} \sigma_{xz} - \frac{\partial u_y}{\partial t} \sigma_{yz} - \frac{\partial u_z}{\partial t} \sigma_{zz}.$$

Среднее значение вектора Умова-Пойнтинга выразим через комплексные амплитуды перемещений и напряжений следующим образом:

$$\overline{\mathbf{P}} = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(u_x^* \sigma_{xx} + u_y^* \sigma_{xy} + u_z^* \sigma_{xz}, u_x^* \sigma_{xy} + u_y^* \sigma_{yy} + u_z^* \sigma_{yz}, u_x^* \sigma_{xz} + u_y^* \sigma_{yz} + u_z^* \sigma_{zz}). \quad (9.2)$$

## 9.2. Условия на бесконечности

Определим, в каком направлении переносят энергию элементарные упругие волны (8.13)–(8.18).

Найдем по формуле (9.2) средние значения третьей компоненты вектора Умова-Пойнтинга для элементарных гармоник всех шести типов  $A-H$ :

$$\begin{aligned} A : \quad \overline{P}_z &= -\frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{1mn} z} \text{Re}\beta_{1mn} \rho \omega^2, \\ B : \quad \overline{P}_z &= \frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{1mn} z} \text{Re}\beta_{1mn} \rho \omega^2, \\ C : \quad \overline{P}_z &= -\mu \frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{2mn} z} \text{Re}\beta_{2mn} [L_{xm}^2 + |k_2^2 - (L_{xm}^2 + L_{yn}^2)|], \\ D : \quad \overline{P}_z &= \mu \frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{2mn} z} \text{Re}\beta_{2mn} [L_{xm}^2 + |k_2^2 - (L_{xm}^2 + L_{yn}^2)|], \\ E : \quad \overline{P}_z &= -\mu \frac{\omega}{2} e^{-2\text{Im}\beta_{2mn} z} \text{Re}\beta_{2mn} [L_{yn}^2 + |k_2^2 - (L_{xm}^2 + L_{yn}^2)|], \\ H : \quad \overline{P}_z &= \mu \frac{\omega}{2} e^{2\text{Im}\beta_{2mn} z} \text{Re}\beta_{2mn} [L_{yn}^2 + |k_2^2 - (L_{xm}^2 + L_{yn}^2)|]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Легко видеть, что при мнимых значениях  $\beta_{jmn}$  третья компонента вектора Умова-Пойнтинга обращается в нуль, а напряжения и перемещения исчезают при  $z \rightarrow +\infty$  или  $z \rightarrow -\infty$  (затухающие волны). При вещественных значениях  $\beta_{jmn}$  компонента  $\overline{P}_z$  для всех элементарных гармоник не зависит от пространственной координаты  $z$  и положительная или отрицательная. В этом случае элементарные гармоники переносят энергию вдоль оси  $z$  (распространяющиеся волны). В соответствии со знаком  $\overline{P}_z$  гармоники Флоке типов  $A$ ,  $C$  и  $E$  положительно



ориентированы по отношению к координатной плоскости  $Oxy$ , а гармоники типов В, D, Н – отрицательно ориентированы.

Поток энергии упругой волны через область  $[0, l_x] \times [0, l_y]$  плоскости  $Oxy$  можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \bar{\Pi}_z(x, y, 0) dy dx = \\ &= -\frac{\omega l_x l_y}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Im}[u_{xmn}^*(0)\sigma_{xzm}(0) + u_{ymn}^*(0)\sigma_{yzm}(0) + u_{zmn}^*(0)\sigma_{zzm}(0)]. \end{aligned}$$

Как и в двумерном случае, квазипериодическую волну общего вида будем называть положительно ориентированной (уходящей на бесконечность в направлении оси  $z$ ), если она состоит только из положительно ориентированных гармоник. Квазипериодическую волну будем называть отрицательно ориентированной (приходящей с бесконечности), если она состоит только из отрицательно ориентированных гармоник. Требование ориентированности волны равносильно в нашем случае условиям на бесконечности.

Таким образом, для положительно ориентированных волн в формуле (8.12) все векторы  $\mathbf{b}_{mn} = 0$ . Тогда

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{mn} \mathbf{E}_{mn}^+(z) \mathbf{a}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y}. \quad (9.4)$$

Для отрицательно ориентированных волн  $\mathbf{a}_{mn} = 0$  и

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{mn} \mathbf{E}_{mn}^-(z) \mathbf{b}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y}. \quad (9.5)$$

## 10. Граничные задачи для системы уравнений теории упругости в полупространстве

В трехмерном случае граничные задачи для системы уравнений теории упругости можно исследовать по той же схеме, что и в двумерном случае.

### 10.1. Основные граничные задачи

В общем случае в пространственной теории упругости основные граничные задачи ставятся следующим образом: первая граничная задача – когда на границе упругого полупространства заданы следы перемещений  $u_x(x, y, 0) = f_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y, 0) = f_y(x, y)$ ,  $u_z(x, y, 0) = f_z(x, y)$ , а вторая граничная задача – когда заданы следы напряжений  $\sigma_{xz}(x, y, 0) = g_{xz}(x, y)$ ,  $\sigma_{yz}(x, y, 0) = g_{yz}(x, y)$ ,  $\sigma_{zz}(x, y, 0) = g_{zz}(x, y)$ . (См., например, [28, п. 5.9]).

Рассмотрим две задачи об отражении упругой волны от границы упругого полупространства. Покажем, что (как и в двумерном случае) решение таких задач может быть найдено в явном виде.

Пусть отрицательно ориентированная упругая волна от бесконечно удаленного источника  $(u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}, \sigma_{xy}^{(0)}, \sigma_{xz}^{(0)}, \sigma_{yz}^{(0)}, \sigma_{xx}^{(0)}, \sigma_{yy}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)})$  набегаёт на границу упругого полупространства, находящегося в контакте с жестким основанием. Требуется найти отраженную положительно ориентированную волну  $(u_x, u_y, u_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ , удовлетворяющую граничным условиям вида

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, y, 0) + u_x(x, y, 0) &= 0, & u_y^{(0)}(x, y, 0) + u_y(x, y, 0) &= 0, \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z(x, y, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (10.1)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{xz}(x, y, 0) &= 0, & \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{yz}(x, y, 0) &= 0, \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z(x, y, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Условия (10.1) – частный случай первой основной задачи – соответствуют случаю, когда упругое полупространство находится в полном контакте с жестким основанием. Условия (10.2) ставятся, если упругое полупространство скользит по жесткому основанию без трения и без отслоения.

Падающую волну зададим в виде гармоник Флоке с индексами  $(s, r)$ :

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, y, z) &= [B_{sr}L_{xs}e^{-i\beta_{1sr}z} + D_{sr}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ u_y^{(0)}(x, y, z) &= [B_{sr}L_{yr}e^{-i\beta_{1sr}z} + H_{sr}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ u_z^{(0)}(x, y, z) &= [-B_{sr}\beta_{1sr}e^{-i\beta_{1sr}z} + D_{sr}L_{xs}e^{-i\beta_{2sr}z} + H_{sr}L_{yr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{xx}^{(0)}(x, y, z) &= i[B_{sr}(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xs}^2)e^{-i\beta_{1sr}z} + D_{sr}2\mu L_{xs}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{yy}^{(0)}(x, y, z) &= i[B_{sr}(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yr}^2)e^{-i\beta_{1sr}z} + H_{sr}2\mu L_{yr}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{zz}^{(0)}(x, y, z) &= i[B_{sr}(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1sr}^2)e^{-i\beta_{1sr}z} - D_{nm}2\mu L_{xs}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z} - \\ &\quad - H_{sr}2\mu L_{yr}\beta_{2sr}e^{-i\beta_{2sr}z}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, z) &= i\mu[B_{sr}e^{-i\beta_{1sr}z}2L_{xs}L_{yr} + D_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}\beta_{2sr}L_{yr} + \\ &\quad + H_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}\beta_{2sr}L_{xs}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, z) &= i\mu[-B_{sr}e^{-i\beta_{1sr}z}2L_{xs}\beta_{1sr} - D_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}(\beta_{2sr}^2 - L_{xs}^2) + \\ &\quad + H_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}L_{xs}L_{yr}]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}, \\ \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, z) &= i\mu[-B_{sr}e^{-i\beta_{1sr}z}2L_{yr}\beta_{1sr} + D_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}L_{xs}L_{yr} - \\ &\quad - H_{sr}e^{-i\beta_{2sr}z}(\beta_{2sr}^2 - L_{yr}^2)]e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}. \end{aligned}$$

Эта же волна в виде вектор-функции имеет вид

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{B}_{sr} \mathbf{E}_{sr}^-(z) \mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y}. \quad (10.3)$$

Отраженную волну будем искать в виде (9.4).

**Теорема 10.1.** *Если упругое полупространство находится в полном контакте с жестким основанием, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с индексом  $(s, r)$ . Если упругое полупространство скользит без трения по жесткому основанию, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с индексом  $(s, r)$ .*

Доказательство. Рассмотрим первую задачу, когда при  $x \in (0, l_x)$ ,  $y \in (0, l_y)$  должны быть выполнены условия (10.1).

Введем матрицы  $\mathbf{P}_{jk}$  и  $\mathbf{Q}_{jk}$ , составленные из первых трех строк матриц  $\mathbf{A}_{mn}$  и  $\mathbf{B}_{mn}$ :

$$\mathbf{P}_{jk} = \begin{pmatrix} L_{xj} & \beta_{2jk} & 0 \\ L_{yj} & 0 & \beta_{2jk} \\ \beta_{1jk} & -L_{xj} & -L_{yj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{jk} = \begin{pmatrix} L_{xj} & \beta_{2jk} & 0 \\ L_{yj} & 0 & \beta_{2jk} \\ -\beta_{1jk} & L_{xj} & L_{yj} \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Условия (10.1) в векторной форме примут вид

$$\mathbf{Q}_{sr} \mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0. \quad (10.5)$$

Очевидно, что  $\mathbf{a}_{mn} = 0$ , если пара индексов  $(m, n) \neq (s, r)$ .

Для гармоники с парой индексов  $(s, r)$

$$\mathbf{a}_{sr} = -\mathbf{P}_{sr}^{-1} \mathbf{Q}_{sr} \mathbf{b}_{sr}^{(0)}. \quad (10.6)$$

Отметим, что формула (10.6) имеет смысл, если существует обратная матрица  $\mathbf{P}_{sr}^{-1}$ , то есть если

$$|\mathbf{P}_{sr}| = \beta_{2sr}(\beta_{1sr}\beta_{2sr} + L_{xs}^2 + L_{yr}^2) \neq 0.$$

Предположим, что это условие не выполнено. Так как случай  $\beta_{2sr} = 0$  был исключен, то должно быть  $L_{xs}^2 + L_{yr}^2 = -\beta_{1sr}\beta_{2sr}$ . Это равенство выполняется, если  $\beta_{1sr}\beta_{2sr} < 0$ . Тогда оба числа  $\beta_{jsr}$  должны быть мнимыми:  $\beta_{1sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_1^2}$  и  $\beta_{2sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}$ . Но равенство

$$L_{xs}^2 + L_{yr}^2 = \sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_1^2} \sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}$$

невозможно при положительных  $k_1$  и  $k_2$ . Пришли к противоречию.

Для второй граничной задачи, когда должны быть выполнены условия (10.2), составим из третьей, пятой и шестой строк матриц  $\mathbf{A}_{mn}$  и  $\mathbf{B}_{mn}$  еще две матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{mn} &= \begin{pmatrix} \beta_{1mn} & -L_{xm} & -L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & -i\mu L_{xm}L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & -i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_{mn} &= \begin{pmatrix} -\beta_{1mn} & L_{xm} & L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & i\mu L_{xm}L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & i\mu L_{xm}L_{yn} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Условия (10.2) равносильны системе уравнений

$$\mathbf{S}_{sr} \mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0. \quad (10.8)$$

Ее решение

$$\mathbf{a}_{sr} = -\mathbf{R}_{sr}^{-1} \mathbf{S}_{sr} \mathbf{b}_{sr}^{(0)}, \quad (10.9)$$

$$\mathbf{a}_{mn} = 0, \quad \text{при } m \neq s, n \neq r.$$

Матрица  $\mathbf{R}_{sr}$  имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда

$$|\mathbf{R}_{sr}| = -\mu^2 \beta_{1sr} \beta_{2sr}^2 (\beta_{2sr}^2 + L_{xs}^2 + L_{yr}^2) \neq 0.$$

Комплексное число  $\beta_{2sr}^2 + L_{xs}^2 + L_{yr}^2 \neq 0$ . Иначе  $\beta_{2sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}$ , а отсюда следует, что  $k_2 = 0$ . Противоречие.

## 10.2. Переопределенные граничные задачи

В рассмотренных выше задачах условий на границе полупространства было столько, сколько требовалось для нахождения единственного решения системы линейных (векторных) уравнений. Точнее говоря, условий было ровно столько, сколько неизвестных величин требовалось найти.

Условия полного контакта (10.1) и скольжения без трения (10.2) для полупространства были выбраны исходя из физических соображений. Если условий на границе задать больше, то задача становится переопределенной.

Рассмотрим первую переопределенную задачу отражения для упругого полупространства, расположенного на жестком основании. Будем искать положительно ориентированное квазипериодическое решение системы уравнений (8.3) в верхнем полупространстве  $z > 0$ ,

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u_x(x, y, 0) &= u_{x0}(x, y), & u_y(x, y, 0) &= u_{y0}(x, y), & u_z(x, y, 0) &= u_{z0}(x, y), \\ \sigma_{xz}(x, y, 0) &= \sigma_{xz0}(x, y), & \sigma_{yz}(x, y, 0) &= \sigma_{yz0}(x, y), & \sigma_{zz}(x, y, 0) &= \sigma_{zz0}(x, y) \end{aligned} \quad (10.10)$$

(условия полного контакта).

Положительно определенную упругую волну в полупространстве  $z > 0$  будем искать в векторной форме (9.4). Введем матрицу

$$\mathbf{W}_{mn} = \begin{pmatrix} L_{xm} & \beta_{2mn} & 0 \\ L_{ym} & 0 & \beta_{2mn} \\ \beta_{1mn} & -L_{xm} & -L_{ym} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & -i\mu L_{xm}L_{ym} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{ym} & -i\mu L_{xm}L_{ym} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{ym}^2) \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) & -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -i2\mu\beta_{2mn}L_{ym} \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

Условия (10.10) в векторной форме имеют вид  $\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y)$ .

**Теорема 10.2.** *Переопределенная граничная задача (8.3), (10.10) имеет единственное положительно ориентированное решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}_{mn} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{ym}(y-t_2)} \right) \mathbf{u}_0(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0, \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y), \quad (10.12)$$

где  $\mathbf{D}_{mn}$  – некоторые матрицы размером  $6 \times 3$  с линейно независимыми строками, такие, что произведение  $\mathbf{D}_{mn} \mathbf{W}_{mn} = 0$ .

Доказательство. Чтобы получить единственное положительно ориентированное решение системы уравнений (8.3) в верхней полуплоскости, достаточно задать только три из шести условий (10.10). Значит в векторном равенстве

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{W}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{ym}y} = \mathbf{u}_0(x, y)$$

любые три строки можно получить линейным преобразованием трех других строк. Если  $\mathbf{u}_{0n}$  – коэффициенты Флоке квазипериодической вектор-функции  $\mathbf{u}_0(x, y)$ , то при каждом  $n$  в равенствах  $\mathbf{W}_{mn} \mathbf{a}_{mn} = \mathbf{u}_{0,n}$  строки линейно зависимы. Найдем такие матрицы  $\mathbf{D}_{mn}$ , что  $\mathbf{D}_{mn} \mathbf{W}_{mn} = 0$ .

Применим способ отыскания матриц  $\mathbf{D}_{mn}$ , предложенный в первой главе диссертации. Пусть, например, требуется найти зависимость предельных значений напряжений  $\sigma_{xz,0}(x, y)$ ,  $\sigma_{yz,0}(x, y)$ ,  $\sigma_{zz,0}(x, y)$  от перемещений  $u_{x,0}(x, y)$ ,  $u_{y,0}(x, y)$ ,  $u_{z,0}(x, y)$ . Будем искать матрицу  $\mathbf{D}_{mn}$

В ВИДЕ

$$\begin{pmatrix} d_{mn,1} & d_{mn,2} & d_{mn,3} & 1 & 0 & 0 \\ d_{mn,4} & d_{mn,5} & d_{mn,6} & 0 & 1 & 0 \\ d_{mn,7} & d_{mn,8} & d_{mn,9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения  $\mathbf{D}_{mn} \mathbf{W}_{mn} = 0$  следует, что

$$\begin{aligned} d_{mn,1} &= -i\mu \frac{L_{xm}^2 \beta_{1mn} + \beta_{2mn}(L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}, & d_{mn,2} &= d_{mn,4} = -i\mu \frac{L_{xm}L_{yn}(\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}, \\ d_{mn,3} &= -i\mu L_{xm} \left( 1 + \frac{\beta_{2mn}(\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} \right), & d_{mn,5} &= -i\mu \frac{L_{yn}^2 \beta_{1mn} + \beta_{2mn}(L_{xm}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}, \\ d_{mn,6} &= -i\mu L_{yn} \left( 1 + \frac{\beta_{2mn}(\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} \right), & d_{mn,7} &= -iL_{xm} \left( \frac{k_1^2 \lambda + 2\mu\beta_{1mn}(\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} \right), \\ d_{mn,8} &= -iL_{yn} \left( \frac{k_1^2 \lambda + 2\mu\beta_{1mn}(\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} \right), & d_{mn,9} &= -i\beta_{2mn} \frac{\rho\omega^2}{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}. \end{aligned}$$

Тогда три условия разрешимости в скалярной форме задачи (8.3), (10.10) имеют вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,1} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{x0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ & + \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,2} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{y0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$+ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,3} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{z0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \sigma_{xz,0}(x, y) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,4} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{x0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ & + \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,5} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{y0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$+ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,6} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{z0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \sigma_{yz,0}(x, y) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,7} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{x0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ & + \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,8} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{y0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$+ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{mn,9} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{z0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \sigma_{zz,0}(x, y) = 0.$$

Рассмотрим еще одну переопределенную задачу: найти положительно ориентированное квазипериодическое решение системы уравнений (8.3) в верхнем полупространстве,

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u_x(x, y, 0) &= u_{x0}(x, y), \quad u_y(x, y, 0) = u_{y0}(x, y), \quad u_z(x, y, 0) = 0, \\ \sigma_{xz}(x, y, 0) &= \sigma_{xz0}(x, y), \quad \sigma_{yz}(x, y, 0) = \sigma_{yz0}(x, y). \end{aligned} \quad (10.16)$$

**Теорема 10.3.** *Переопределенная граничная задача (8.3), (10.16) имеет единственное положительно ориентированное решение тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -i\mu \frac{\beta_{1mn}(L_{xm}^2 + \beta_{2mn}^2) + \beta_{2mn}L_{yn}}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{x0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -i\mu \frac{L_{yn}(L_{xm}\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{y0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \sigma_{xz,0}(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y), \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -i\mu \frac{L_{xm}(L_{yn}\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{x0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -i\mu \frac{\beta_{1mn}(L_{yn}^2 + \beta_{2mn}^2) + \beta_{2mn}L_{xm}}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}} e^{iL_{xm}(x-t_1)} e^{iL_{yn}(y-t_2)} \right) u_{y0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \sigma_{yz,0}(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Доказательство. Положительно ориентированная волна в верхнем полупространстве определяется по формуле (9.4), причем коэффициенты Флоке квазипериодической функции  $u_z(x, y, z)$  имеют вид  $u_{zn} = A_{mn}\beta_{1mn} - C_{mn}L_{xm} - E_{mn}L_{yn}$ . Из условия  $u_z(x, y, 0) = 0$  следует, что

$$A_{mn} = C_{mn} \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}}.$$

Исключим  $A_{mn}$  из оставшихся условий (10.16), тогда останется четыре уравнения с двумя группами неизвестных:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{mx}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = u_{x0}(x, y), \\ &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn} \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{yn}}{\beta_{1mn}} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = u_{y0}(x, y), \\ &i\mu \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn}(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2) + E_{mn}L_{xn}L_{yn} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = \sigma_{xz0}(x, y), \\ &i\mu \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn}L_{xn}L_{yn} + E_{mn}(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2) \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = \sigma_{yz0}(x, y). \end{aligned}$$

Введем новые искомые векторы  $\mathbf{c}_{mn} = (C_{mn}, E_{mn})$ . Пусть матрица

$$\mathbf{C}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{mx}}{\beta_{1mn}} & \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}} \\ \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} & \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{yn}}{\beta_{1mn}} \\ i\mu(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2) & i\mu L_{xn}L_{yn} \\ i\mu L_{xn}L_{yn} & i\mu(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2) \end{pmatrix},$$

ее размер  $2 \times 4$ , и вектор  $\mathbf{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, \sigma_{0xz}, \sigma_{0yz})$ . Тогда в векторном равенстве

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_{m,n} \mathbf{c}_{mn} e^{iL_{mx}x} e^{iL_{yn}y} = \mathbf{u}_0(x, y)$$

любые две строки можно получить линейным преобразованием двух других строк. Как и в предыдущей задаче, найдем такие матрицы  $\mathbf{D}_{mn}$  размером  $4 \times 2$ , что  $\mathbf{D}_{mn} \mathbf{C}_{mn} = 0$ . Элементы этой матрицы

$$d_{mn,1} = -i\mu \frac{\beta_{1mn}(L_{xm}^2 + \beta_{2mn}^2) + \beta_{2mn}L_{yn}}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}, \quad d_{mn,2} = -i\mu \frac{L_{yn}(L_{xm}\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}},$$

$$d_{mn,3} = -i\mu \frac{L_{xm}(L_{yn}\beta_{1mn} - \beta_{2mn})}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}, \quad d_{mn,4} = -i\mu \frac{\beta_{1mn}(L_{yn}^2 + \beta_{2mn}^2) + \beta_{2mn}L_{xm}}{L_{xm} + L_{yn} + \beta_{1mn}\beta_{2mn}}.$$

Получили равенства (10.17), (10.18), которые показывают, как в переопределенной граничной задаче функции  $\sigma_{xz,0}$  и  $\sigma_{yz,0}$  должны выражаться через функции  $u_{x0}$  и  $u_{y0}$ .

### 10.3. Задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов

Рассмотрим следующую задачу. Пусть бесконечно удаленный источник в верхнем полупространстве возбуждает отрицательно ориентированную упругую волну  $\mathbf{u}^{(0)}$  вида (10.3). Упругое полупространство  $z > 0$  лежит на жестком основании  $z < 0$ . На плоскости  $z = 0$  расположена двоякопериодическая система дефектов. Обозначим через  $\mathcal{M}$  часть плоскости, занятую дефектами, а остальную ее часть – как  $\mathcal{N}$  (см. рис. 10.1). Требуется найти отраженную вверх положительно ориентированную волну вида (9.4), удовлетворяющую граничным условиям: на  $\mathcal{N}$  должны быть выполнены условия (10.1), на  $\mathcal{M}$  – условия (10.2).

В первой главе было найдено решение для аналогичной двумерной задачи. Задача дифракции плоской упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе полуплоскости, была сведена к парному сумматорному функциональному уравнению (3.10), (3.11) и к БСЛАУ вида (3.14). При этом решение было найдено как сумма решений



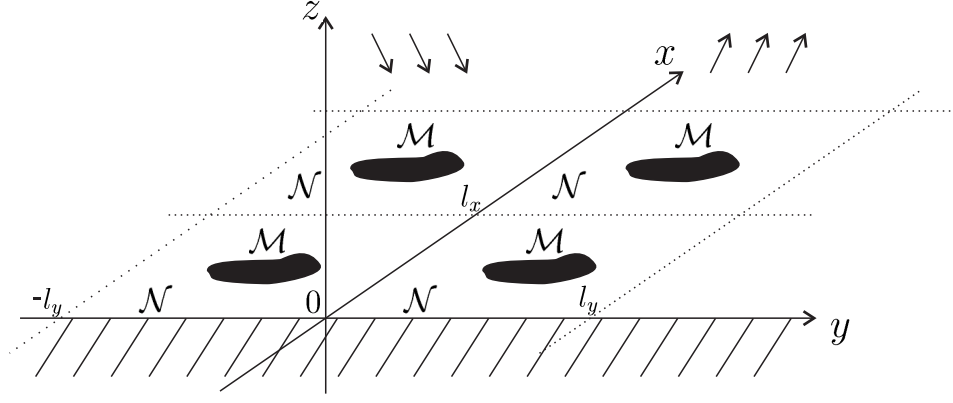


Рис. 10.1. Двойкопериодическая система дефектов

двух задач: вспомогательной задачи об отражении волны (без дефектов) и волны, представляющей собой возмущение от дефектов. Применим этот подход и в трехмерном случае.

Пусть решение вспомогательной задачи должны удовлетворять условиям (10.1). По теореме 10.1 это решение существует и единственно. Обозначим его как  $\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z, \underline{\sigma}_{xx}, \underline{\sigma}_{yy}, \underline{\sigma}_{zz}, \underline{\sigma}_{xy}, \underline{\sigma}_{xz}, \underline{\sigma}_{yz}$ .

Перейдем к задаче о возмущении упругого поля дефектами. По условиям этой задачи  $u_z = 0$  всюду, следовательно для всех пар индексов  $(m, n)$  должно выполняться равенство

$$A_{mn} = C_{mn} \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}}.$$

Исключим коэффициенты  $A_{mn}$  и запишем оставшиеся граничные условия в скалярной форме так:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{mx}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= 0, \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn} \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{yn}}{\beta_{1mn}} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= 0, \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (10.19)$$

$$\begin{aligned} i\mu \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn}(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2) + E_{mn}L_{xn}L_{yn} \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= -\underline{\sigma}_{xz} - \sigma_{xz}^{(0)}, \\ i\mu \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_{mn}L_{xn}L_{yn} + E_{mn}(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2) \right) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= -\underline{\sigma}_{yz} - \sigma_{yz}^{(0)}, \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (10.20)$$

Пусть  $\mathbf{c}_{mn} = (C_{mn}, E_{mn})$ ,  $\underline{\sigma} = (\underline{\sigma}_{xz} + \sigma_{xz}^{(0)}, \underline{\sigma}_{yz} + \sigma_{yz}^{(0)})$  и матрицы

$$\mathbf{P}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{mx}}{\beta_{1mn}} & \frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}} \\ \frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} & \frac{\beta_{1mn}\beta_{2mn} + L_{yn}}{\beta_{1mn}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{mn} = \begin{pmatrix} i\mu(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2) & i\mu L_{xn}L_{yn} \\ i\mu L_{xn}L_{yn} & i\mu(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2) \end{pmatrix}.$$

Тогда равенства (10.19), (10.20) в векторной форме имеют вид

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{mn} \mathbf{c}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N},$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{mn} \mathbf{c}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma}, \quad (x, y) \in \mathcal{M}.$$

Приведем это ПСФУ к стандартной форме. Пусть новые искомые векторы  $\mathbf{d}_{mn} = \mathbf{Q}_{mn} \mathbf{c}_{mn}$ , тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{mn} \mathbf{Q}_{mn}^{-1} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (10.21)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma}, \quad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (10.22)$$

**Теорема 10.4.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе полупространства, с граничными условиями (10.1) на  $\mathcal{N}$  и (10.2) на  $\mathcal{M}$  сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению (10.21), (10.22).*

Заметим, что условие существования обратной матрицы  $\mathbf{Q}_{m,n}^{-1}$  в формуле (10.21) сводится к условию  $\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2 + L_{yn}^2 \neq 0$ . Равенство  $\beta_{2mn}^2 = -L_{xm}^2 - L_{yn}^2$  может быть выполнено только при  $k_2 = 0$ , чего быть не может.

Рассмотрим еще одну задачу дифракции упругой волны. Пусть требуется найти уходящую вверх положительно ориентированную волну вида (9.4), удовлетворяющую на  $\mathcal{N}$  граничным условиям полного контакта с жестким основанием и на  $\mathcal{M}$  – условиям свободной границы

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{xz}(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (10.23)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{zz}(x, y, 0) = 0,$$

Используем матрицы  $\mathbf{P}_{mn}$  и  $\mathbf{Q}_{mn}$ , определенные формулами (10.4). Матрицы  $\mathbf{R}_{mn}$  и  $\mathbf{S}_{mn}$  составим из пятой, шестой и девятой строк матриц (8.9), (8.10):

$$\mathbf{R}_{mn} = \begin{pmatrix} 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & -i\mu L_{xm}L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & -i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) & -2i\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -2i\mu\beta_{2mn}L_{yn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{mn} = \begin{pmatrix} -2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2) & i\mu L_{xm}L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & i\mu L_{xm}L_{yn} & -i\mu(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2) & -2i\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -2i\mu\beta_{2mn}L_{yn} \end{pmatrix}.$$

Условия полного контакта с основанием при  $(x, y) \in \mathcal{N}$  в векторной форме имеют вид (10.5), а условия (10.23) запишем так:

$$\mathbf{S}_{sr} \mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M}.$$

Как и в предыдущем случае, будем искать решение задачи дифракции в виде суммы двух слагаемых – решения вспомогательной задачи об отражении упругой волны от границы полупространства, на которой заданы условия (9.1), и решения задачи о возмущении упругого поля периодической системой неоднородностей. Компоненты напряжений и перемещений падающей волны, как обычно, пометим верхним индексом (0), и подчеркнем компоненты волны, отраженной от границы полупространства без дефектов. Тогда граничные условия для полного упругого поля

$$\begin{aligned} u_x^{(0)} + \underline{u_x} + u_x &= 0, & u_y^{(0)} + \underline{u_y} + u_y &= 0, & u_z^{(0)} + \underline{u_z} + u_z &= 0, & (x, y) \in \mathcal{N}, \\ \sigma_{xz}^{(0)} + \underline{\sigma_{xz}} + \sigma_{xz} &= 0, & \sigma_{yz}^{(0)} + \underline{\sigma_{yz}} + \sigma_{yz} &= 0, & \sigma_{zz}^{(0)} + \underline{\sigma_{zz}} + \sigma_{zz} &= 0, & (x, y) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Но решение вспомогательной задачи строится так, что

$$u_x^{(0)} + \underline{u_x} = 0, \quad u_y^{(0)} + \underline{u_y} = 0, \quad u_z^{(0)} + \underline{u_z} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}.$$

Поэтому в задаче о возмущении упругого поля дефектами должны быть выполнены граничные условия

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (10.24)$$

$$\sigma_{xz} = -\sigma_{xz}^{(0)} - \underline{\sigma_{xz}}, \quad \sigma_{yz} = -\sigma_{yz}^{(0)} - \underline{\sigma_{yz}}, \quad \sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^{(0)} - \underline{\sigma_{zz}}, \quad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (10.25)$$

Обозначим

$$\underline{\sigma} = (-\sigma_{xz}^{(0)} - \underline{\sigma_{xz}}, -\sigma_{yz}^{(0)} - \underline{\sigma_{yz}}, -\sigma_{zz}^{(0)} - \underline{\sigma_{zz}}) = (\mathbf{R}_{sr} \mathbf{P}_{sr}^{-1} \mathbf{Q}_{sr} - \mathbf{S}_{sr}) \mathbf{b}_{sr} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y}.$$

Тогда из условий (10.24), (10.25) легко получить векторное парное сумматорное функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= 0, & (x, y) \in \mathcal{N}, \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{mn} \mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} &= \underline{\sigma}, & (x, y) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Перейдем к новым неизвестным  $\mathbf{d}_{mn} = \mathbf{R}_{mn} \mathbf{a}_{mn}$ , разделим левые и правые части каждого равенства в ПСФУ на  $\exp[i\alpha_x x]$  и  $\exp[i\alpha_y y]$ . Получим

**Теорема 10.5.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов на границе полупространства с граничными условиями (10.1) на  $\mathcal{N}$  и (10.23) на  $\mathcal{M}$  сводится к векторному ПСФУ*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (10.26)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y} = \tilde{\mathbf{b}}_{sr} e^{iL_x s x} e^{iL_y r y}, \quad (x, y) \in \mathcal{M}, \quad (10.27)$$

где  $L_x = 2\pi/l_x$ ,  $L_y = 2\pi/l_y$ ,  $\mathbf{G}_{mn} = \mathbf{P}_{mn} \mathbf{R}_{mn}^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_{sr} = (\mathbf{R}_{sr} \mathbf{P}_{sr}^{-1} \mathbf{Q}_{sr} - \mathbf{S}_{sr}) \mathbf{b}_{sr}$ .

Покажем, как перейти от ПСФУ (10.26), (10.27) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с помощью интегрально-сумматорного тождества.

**Лемма 10.1.** *Для любого набора невырожденных квадратных матриц  $\mathbf{R}_{m,n}$  и любого набора векторов  $\mathbf{d}_{mn}$ ,  $m, n = 0, \pm 1, \dots$ , согласованных по размеру, справедливо равенство (если имеют смысл бесконечные суммы)*

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left( \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{pq}^{-1} e^{iL_x p(x-t_1)} e^{iL_y q(y-t_2)} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{mn} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m t_1} e^{iL_y n t_2} \right) dt_1 dt_2 = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y}, \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y). \end{aligned} \quad (10.28)$$

Тогда двойная сумма

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y}$$

задана на  $\mathcal{M}$  равенством (10.27), а на  $\mathcal{N}$ , как следует из тождества (10.28) с учетом условия (10.26),

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y} = \\ & \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{pq}^{-1} e^{iL_x p(x-t_1)} e^{iL_y q(y-t_2)} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m t_1} e^{iL_y n t_2} \right) dt_1 dt_2 = \\ & = \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{pq}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x p x} e^{iL_y q y} \int_{\mathcal{M}} e^{iL_x(m-p)t_1} e^{iL_y(n-q)t_2} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Обозначим

$$I_{q,p} = \int_{\mathcal{M}} e^{iL_x q \psi} e^{iL_y p \xi} d\psi d\xi, \quad J_{q,p} = \int_{\mathcal{N}} e^{iL_x q \psi} e^{iL_y p \xi} d\psi d\xi, \quad p, q = 0, \pm 1, \dots \quad (10.29)$$

При  $x \in (0, l_x)$ ,  $y \in (0, l_y)$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x m x} e^{iL_y n y} = \\ & = \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{pq}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} e^{iL_x p x} e^{iL_y q y} I_{m-p, n-q} + \tilde{\mathbf{b}}_{sr} e^{iL_x s x} e^{iL_y r y}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Перейдем в равенстве (10.30) к равенству коэффициентов Фурье и получим следующее утверждение.

**Теорема 10.6.** *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов на границе полупространства с граничными условиями (9.1) на  $\mathcal{N}$  и (9.23) на  $\mathcal{M}$  сводится к БСЛАУ*

$$l_x l_y \mathbf{d}_{kh} - \frac{1}{l_x l_y} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{pq}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{mn} \mathbf{d}_{mn} J_{p-k, q-h} I_{m-p, n-q} = \tilde{\mathbf{b}}_{sr} I_{s-k, r-h},$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \quad h = 0, \pm 1, \dots$$

## 11. Задача об отражении и преломлении упругой волны на границе раздела упругих сред

Из различных задач сопряжения упругих полупространств в трехмерном случае рассмотрим только одну задачу. Пусть два упругих полупространства с параметрами сред  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  и  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$  имеют общую границу – плоскость  $z = 0$ . На границу раздела полупространств набегают отрицательно ориентированная упругая волна  $(u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}, \sigma_{xy}^{(0)}, \sigma_{xz}^{(0)}, \sigma_{yz}^{(0)}, \sigma_{xx}^{(0)}, \sigma_{yy}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)})$ . Пусть требуется найти отраженную в верхнее полупространство положительно ориентированную волну  $(u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}, \sigma_{xy}^{(1)}, \sigma_{xz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_{xx}^{(1)}, \sigma_{yy}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(1)})$  и преломленную в нижнее полупространство отрицательно ориентированную волну  $(u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}, \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_{xx}^{(2)}, \sigma_{yy}^{(2)}, \sigma_{zz}^{(2)})$  так, чтобы были выполнены условия полного контакта:

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, y, 0) + u_x^{(1)}(x, y, 0) &= u_x^{(2)}(x, y, 0), \quad u_y^{(0)}(x, y, 0) + u_y^{(1)}(x, y, 0) = u_y^{(2)}(x, y, 0), \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z^{(1)}(x, y, 0) &= u_z^{(2)}(x, y, 0), \\ \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, 0), \quad \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, 0), \\ \sigma_{zz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Введем матрицы

$$\mathbf{P}_{j,mn} = \begin{pmatrix} L_{xm} & \beta_{j,2mn} & 0 \\ L_{yn} & 0 & \beta_{j,2mn} \\ \beta_{j,1mn} & -L_{xm} & -L_{yn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{j,mn} = \begin{pmatrix} L_{xm} & \beta_{j,2mn} & 0 \\ L_{yn} & 0 & \beta_{j,2mn} \\ -\beta_{j,1mn} & L_{xm} & L_{yn} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

$$\mathbf{R}_{j,mn} = \begin{pmatrix} 2i\mu_j\beta_{j,1mn}L_{xm} & i\mu_j(\beta_{j,2mn}^2 - L_{xm}^2) & -i\mu_jL_{xm}L_{yn} \\ 2i\mu_j\beta_{j,1mn}L_{yn} & -i\mu_jL_{xm}L_{yn} & i\mu_j(\beta_{j,2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda_j k_{j,1}^2 + 2\mu_j\beta_{j,1mn}^2) & -i2\mu_j\beta_{j,2mn}L_{xm} & -i2\mu_j\beta_{j,2mn}L_{yn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{j,mn} = \begin{pmatrix} -2i\mu_j\beta_{j,1mn}L_{xm} & -i\mu_j(\beta_{j,2mn}^2 - L_{xm}^2) & i\mu_jL_{xm}L_{yn} \\ -2i\mu_j\beta_{j,1mn}L_{yn} & i\mu_jL_{xm}L_{yn} & -i\mu_j(\beta_{j,2mn}^2 - L_{yn}^2) \\ i(\lambda_j k_{j,1}^2 + 2\mu_j\beta_{j,1mn}^2) & -i2\mu_j\beta_{j,2mn}L_{xm} & -i2\mu_j\beta_{j,2mn}L_{yn} \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2.$

Условия (11.1) запишем в виде системы векторных функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)}e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{1,mn}\mathbf{a}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}_{2,mn}\mathbf{b}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y}, \\ \mathbf{S}_{1,sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)}e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{1,mn}\mathbf{a}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{2,mn}\mathbf{b}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Справедлива

**Теорема 11.1.** *Задача об отражении и преломлении упругой волны для двух смежных полупространств с условиями на границе (11.1) (или (11.2) для векторной формы) имеет единственное решение*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{mn} &= 0, \quad \mathbf{b}_{mn} = 0, \quad (m, n) \neq (s, r), \\ \mathbf{a}_{sr} &= \mathbf{P}_{1,sr}^{-1}(\mathbf{Q}_{2,sr}(\mathbf{P}_{1,sr}^{-1}\mathbf{Q}_{2,sr} - \mathbf{R}_{1,sr}^{-1}\mathbf{S}_{2,sr})^{-1} \times (\mathbf{P}_{1,sr}^{-1}\mathbf{Q}_{1,sr} - \mathbf{R}_{1,sr}^{-1}\mathbf{S}_{1,sr}) - \mathbf{Q}_{1,sr})\mathbf{b}_{sr}^{(0)}, \\ \mathbf{b}_{sr} &= (\mathbf{P}_{1,sr}^{-1}\mathbf{Q}_{2,sr} - \mathbf{R}_{1,sr}^{-1}\mathbf{S}_{2,sr})^{-1}(\mathbf{P}_{1,sr}^{-1}\mathbf{Q}_{1,sr} - \mathbf{R}_{1,sr}^{-1}\mathbf{S}_{1,sr})\mathbf{b}_{sr}^{(0)}. \end{aligned}$$

Разумеется, это утверждение справедливо только тогда, когда существуют обратные матрицы  $\mathbf{P}_{1,sr}^{-1}$  и  $\mathbf{R}_{1,sr}^{-1}$ .

Остальные трехмерные задачи сопряжения для двух полупространств, в том числе и при наличии периодических систем дефектов на границе, могут быть исследованы по той же схеме, что и аналогичные двумерные задачи.

## Заключение

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Для граничных задач и задач сопряжения для системы дифференциальных уравнений с частными производными, которые возникают в теории распространения и дифракции гармонических упругих волн в слоистых средах с периодическими системами неоднородностей, разработан метод сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

2. Доказана теорема единственности решения задачи дифракции упругой волны на отсложении упругой полуплоскости от жесткого основания. Установлено, что решение граничной задачи для системы дифференциальных уравнений плоской теории упругости, к которой сводится задача дифракции упругой квазипериодической волны, может быть только квазипериодическим.

3. Построены решения основных граничных задач для системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости в классе функций, квазипериодических по двум переменным. Найдены условия разрешимости двух переопределенных граничных задач.

4. Показано, что граничные задачи с неоднородными условиями на границе для системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости, когда решение ищется в виде квазипериодических по двум переменным функций, сводятся к скалярным или векторным парным сумматорным функциональным уравнениям.

## Список литературы

1. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ, 1962. – Т. 32. – № 4. – С. 381–390.
2. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. – М.: Мир, 1979. – Т. 1. – 459 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – Изд. 2. – 343 с.
5. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
6. Гандель Ю.В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1983. – Вып. 40. – С. 33–36.
7. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1982. – Вып. 38. – С. 15–18.
8. Гестрина Г.Н. Дифракция плоской электромагнитной волны на металлической решетке // Радиотехника. – Вып. 10. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1969.
9. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ, 1996. – Т. 60. – Вып. 2. – С. 282–289.
10. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
11. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Волновые задачи акустики: монография. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
12. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.
13. Иванов В.П. Задачи дифракции волн в низкочастотной акустике. Монография. – М.: Наука, 2004. – 472 с.



14. Иванов В.П. Об одной обратной задаче дифракции на периодической и двоякопериодической решетке // ЖВМ, 1971. – 11, – №1. – С. 266–271.
15. Ильинский А.С. Метод исследования задач дифракции волн на периодической структуре // ЖВМ, 1974. – 14, – №4. – С. 1063–1067.
16. Ильинский А.С. Прямой метод расчета периодических структур // ЖВМ, 1973. – 13, – №1. – С. 119–126.
17. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 208 с.
18. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.
19. Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Об ошибке Лемба в задаче о дифракции на решетке из тонких круглых стержней // Радиотехника и электроника. – 1964. – Т 9, – №2. – С. 360.
20. Ключников А.С., Нгуен Вьет Хунг, Ключников В.А. Спектральная теория дифракции. – Минск: "Універсітэцкае ", 1997. – 128 с.
21. Коробов А.И., Карабутов А.А., Сапожников О.А. Ультразвуковые волны в твёрдых телах. Методическая разработка специального физического практикума кафедры акустики. М.: Физический факультет МГУ, 2011, 32 с.
22. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматлит, 1963. – 472 с.
23. Кучмент П.А. Теория Флоке для уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. – 1982. – Т. 37. – № 4. – С. 1–60.
24. Левич В.Г. Курс теоретической физики. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 911 с.
25. МАТЛАБ. Страница с сайта официального дистрибьютора компании MathWorks – ЦИТМ "Экспонента" [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matlab.ru/products/MATLAB>, свободный. - Загл. с экрана (дата обращения: 28.01.2017).
26. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 636 с.

27. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
28. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
29. Осипов Е.А. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов. / Е.А. Осипов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2006". – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2006. – С. 175–176.
30. Осипов Е.А. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов. / Е.А. Осипов // Итоговая науч.-образоват. конф. студентов Казанск. гос. ун-та 2006 года: Тезисы докл. / – Казанск. гос. ун-т. Казань, 2006. – С. 59.
31. Осипов Е.А. О задачах дифракции упругих волн на периодических системах дефектов в слоистой среде / Е.А. Осипов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2005". – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2005. – Т. 31. – С. 120–121.
32. Осипов Е.А. Сумматорные и интегральные уравнения двоякопериодических задач дифракции упругих волн в пространстве // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2010". – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2010. – Т. 40. – С. 250–255.
33. Осипов Е.А. О периодических задачах дифракции упругих волн в многослойной среде // Тезисы докладов конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". СамДиф – 2009. – Самара: Из-во "Универс групп", 2009. – С. 45–46.
34. Осипов Е.А., Сагатдинова А.М. Пространственные периодические задачи дифракции упругих волн // Сборник материалов Пятой Всероссийской научно-инновационной школы. – Саратов: Альфа, 2011. – С. 93–95.
35. Осипов Е.А. Сумматорные и интегральные уравнения двоякопериодических задач дифракции упругих волн в пространстве // Труды Российской летней школы "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики". – Казань: Изд-во "Фолиантъ", 2010. – С. 66–74.

36. Осипов Е.А., Плещинский Н.Б. Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах // Известия вузов. Математика, 2008. – №9. – С. 76–82.
37. Осипов Е.А. Энергетические характеристики упругой волны для периодических задач теории упругости // Сборник материалов Четвертой Всероссийской научно-инновационной школы. – Саров: Альфа, 2010. – С. 93–95.
38. Осипов Е.А. Метод частичных областей для задач пространственной теории упругости // Уфимская международная математическая конференция: У88 сборник тезисов (г. Уфа, 27 – 30 сентября 2016 г.) – Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. – С. 131 – 133.
39. Осипов Е.А. Решение периодических граничных задач пространственной теории упругости в векторной форме // Итоги науки и техники. Серия современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 139. Дифференциальные уравнения. Математическая физика. – М., 2017. – Т. 139. – С. 59 – 70.
40. Панасюк В.В., Саврук М.П. Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наукова Думка, 1984. – 344 с.
41. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – Л.: Наука, 1978. – Вып. 18. – 248 с.
42. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. – Л.: Наука, 1982. – 288 с.
43. Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. Задача Коши для системы уравнений динамической теории упругости в полупространстве и ее приложения // Препринт ПМФ-05-03. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2005. – 30 с.
44. Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. К решению задачи дифракции электромагнитных волн на периодической решетке методом интегральных уравнений // Исслед. по прикладной матем. – Вып. 11, – ч.2. – 1984. – С. 61–78.
45. Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б., Осипов Е.А. Упругие свойства слоистого композита, ослабленного периодической системой трещин // Вестник Казанск. гос. технол. ун-та, 2012. – №3. – С. 82–85.

46. Плещинский Н.Б. Абстрактные приближенные схемы (специальный курс): учебное пособие. – Казань: Казанский университет, 2012. – 80 с.
47. Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: учебное пособие. – Казань: Казанск. гос. ун-т, 2008. – 104 с.
48. Плещинский Н.Б. Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши // Препринт ПМФ-04-01. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2004. – 34 с.
49. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000-1. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2000. – 50 с.
50. Попов В.Г. Взаимодействие плоской гармонической волны Релея с тонким жестким краевым включением, сцепленным с упругой средой // ПММ. – 1997. – Т. 61. – Вып. 2. – С. 255–262.
51. Попов В.Г. Дифракция плоских упругих волн на отслоившемся жестком включении в случае гладкого контакта в области отслоения // ПММ, 1998. – Т. 62. – Вып. 2. – С. 290–296.
52. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
53. Солдатенков И.А. Периодическая контактная задача плоской теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. – 2013. – Т. 77. – Вып. 2. – С. 337–351.
54. Сумбатян М.А., Чарлетта М. Колебания поверхности двухслойного упругого полупространства с периодической системой трещин // ПММ, 1998. – Т. 62. – Вып. 2. – С. 323–328.
55. Тумаков Д.Н. Распределение энергии в плоском упругом волноводе // Препринт ПМФ-06-02. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2006. – 30 с.
56. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
57. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 400 с.
58. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 296 с.

59. Шестоपालов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 288 с.
60. Шмидт Г. Электромагнитное рассеяние на периодических структурах // Совр. матем. Фундам. напр. – 2003. – Т.3. – С. 113–128.
61. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
62. Aleksandrova I.L., Osipov E.A., Pleshchinskii N.B., Rogozhin P.A. On problems of electromagnetic wave diffraction on periodical sets of heterogeneities in the layered media // 2012 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2012. – Kharkiv, Ukraine, August 28–30, 2012. – P. 455–458. – ISBN: 978-1-4673-4479-1.
63. Aleksandrova I.L., Osipov E.A., Pleshchinskii N.B., Rogozhin P.A. Wave diffraction problems on periodical sets of heterogeneities in the stratified media // Proceedings of PIERS 2012 in Moscow. – Moscow, August 19–23, 2012. – P. 435–439. – ISSN 1559-9450.
64. Asfar O.R., Nayfeh A.H. The application of the method of multiple scales to wave propagation in periodic structures // SIAM Review. – 1983. – Volume 25. – Issue 4. – P. 455–480.
65. Bao G. Numerical analysis of diffraction by periodic structures: TM polarization // Numer. Math. – 1996. – 75. – 1–16 [electronic edition].
66. Bao G., Bonnetier E. Optimal design of periodic diffractive structures // Appl. Math. Optim. – 43. – 2001. – P. 103–116.
67. Block J., Keer L. Sliding contact of elastically dissimilar periodic profiles // Proceedings of the STLE/ASME International Joint Tribology Conference (IJTC). – 2008. – P. 645–647.
68. Block J., Keer L. Periodic contact problems in plane elasticity // Journal of Mechanics of Materials and Structures, – 3, – (7). – P. 1207–1237.
69. Brillouin L. Wave propagation in periodic structures. – New York: Dover Publication Inc., – 1953.
70. Carmen Chicone Ordinary Differential Equations with Applications. – New-York: Springer, 1999. – 562 p.
71. Gousenkova A.A. Diffraction problems for electromagnetic wave on a strip and for elastic wave on a defect in comparison // Proc. Int. Conf. Mathematical Method in Electromagnetic Theory MMET-2000. – Kharkov, Ukraine, Sept. 12–15, 2000. – V.2. – P. 426–428.

72. Kirsch A. Diffraction by periodic structures // Lecture Notes in Physics. – 1993. – V. 422. – P. 87–102.
73. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. – Birkhaeuser, 1993. – 356 p.
74. Lamb H. On the reflection and transmission of electric waves by metallic grating // Proc. London Math. Soc. – (1), – 29, – 1. – 1898. – 523 p.
75. Miles J.W. The diffraction of a plane wave through a grating // Quart. Appl. Math. – 7. – 1. – 1949. – 152 p.
76. Osipov E.A. Periodic problems of diffraction of an elastic wave in space // Abstracts of international conference "Days on Diffraction'2011 ". – SPb: Universitas Petropolitana MDCCXXIV, 2011. – P. 84–85.
77. Pleshchinskii N.B. The uniqueness theorems in the electromagnetic wave theory and quasi-periodical solutions of the periodical diffraction problems // Proceedings of PIERS 2013 in Stockholm, Sweden. – Stockholm, Aug. 12–15, 2013. – P. 416–420.
78. Sirenko Y.K., Ström S. Modern theory of gratings: resonant scattering: analysis techniques and phenomena. – Springer, 2009. – 402 p.